**Corso di STATISTICA MATEMATICA**
**Prova scritta del 16.1.2007**

Candidato:..........................................................

**Esercizio 1.**
In una fabbrica di assemblaggio di componenti elettronici, si è osservato che la difettosità di una determinata scheda elettronica (ossia, la frazione di schede mal funzionanti sul totale di schede prodotte) dipende fortemente dal fornitore dei singoli componenti. In particolare, se i pezzi da assemblare provengono dal fornitore A, la difettosità è pari a 0.01, mentre se provengono dal fornitore B essa vale 0.05. Si supponga che la probabilità che i componenti da assemblare provengano dal fornitore A o B sia rispettivamente $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.8$. Per monitorare la qualità del processo di assemblaggio, periodicamente si preleva una scheda e la si testa.

a) Calcolare la probabilità che una scheda sia difettosa.

b) Supponendo che la scheda testata risulti essere difettosa, calcolare la probabilità che i suoi componenti provengano dalla linea A.

c) Calcolare la probabilità che ci sia esattamente una scheda difettosa su 5 considerate.

**Esercizio 2.**
Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie la cui densità di probabilità congiunta vale

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} \alpha\frac{\sqrt{y}}{x^2} & 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in cui $\alpha$ rappresenta un parametro reale.

a) Calcolare il valore di $\alpha$ affinché la funzione $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y)$ rappresenti effettivamente una densità di probabilità.

b) Calcolare la probabilità $\mathrm{P}(\boldsymbol{x} \ge 2\boldsymbol{y})$.

c) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\boldsymbol{x}}(x)$, $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

d) Determinare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{x}}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$.

**Esercizio 3**. Sia $\theta$ una grandezza incognita, relativamente alla quale sono disponibili tre misure:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= -\theta + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 &= \theta + \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 &= 2\theta + \boldsymbol{v}_3 \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, sono variabili aleatorie indipendenti, a media nulla e varianza $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 1$, $\sigma_3^2 = 2$, rispettivamente.

*a*) Stabilire quale dei seguenti stimatori è corretto oppure polarizzato:

$$\hat{\theta}_1 = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3; \quad \hat{\theta}_2 = -\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_3; \quad \hat{\theta}_3 = \frac{-\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3}{2}; \quad \hat{\theta}_4 = -\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3$$

*b*) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di $\theta$ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, e stabilire se è polarizzata.

*c*) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di $\theta$ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, e stabilire se è polarizzata.

*d*) Calcolare la varianza degli errori di stima $E[(\theta - \hat{\theta})^2]$, per le stime calcolate ai punti *b*) e *c*).