

Corso di STATISTICA MATEMATICA
Prova scritta del 6.9.2006

Candidato:.....

Esercizio 1. Si considerino tre dadi esternamente identici. Due di questi sono equi (ciascuna faccia ha la stessa probabilità di manifestarsi) mentre il terzo è truccato. Per quest'ultimo dado le probabilità di ottenere come esito di un lancio la faccia contrassegnata dal numero i sono le seguenti:

$$P(i) = \begin{cases} \frac{1}{9} & \text{se } i = 1, \dots, 5 \\ \frac{4}{9} & \text{se } i = 6 \end{cases}$$

Un primo esperimento consiste nello scegliere un dado a caso e poi lanciarlo.

- a) Calcolare la probabilità che il risultato del lancio sia 6.
- b) Calcolare la probabilità di aver lanciato il dado truccato noto che il risultato del lancio è stato 6.

Si consideri ora un secondo esperimento. Si sceglie un dado a caso e poi lo si lancia 4 volte.

- c) Calcolare la probabilità di ottenere come risultato *esattamente* 3 volte il numero 6.
- d) Calcolare la probabilità di aver lanciato il dado truccato sapendo che si è ottenuto *esattamente* 3 volte il numero 6.

Esercizio 2. Siano \mathbf{x} , \mathbf{y} due variabili aleatorie la cui densità di probabilità congiunta vale

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x, y) = \begin{cases} cyx^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- a) Determinare il valore di c affinché $f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x, y)$ rappresenti effettivamente una funzione di densità di probabilità.
- b) Calcolare la probabilità $P(\mathbf{x} > 2\mathbf{y})$.
- c) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\mathbf{x}}(x)$, $f_{\mathbf{y}}(y)$.
- d) Le variabili aleatorie \mathbf{x} e \mathbf{y} sono indipendenti?
- e) Calcolare la media e la varianza della v.a. \mathbf{x} .

Esercizio 3. Siano $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ due variabili aleatorie indipendenti, uniformemente distribuite nell'intervallo $[-\theta, \theta]$:

$$f_{\mathbf{y}_i}(y_i) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta} & \text{se } -\theta \leq y_i \leq \theta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

dove θ è un parametro incognito positivo.

- a) Scrivere l'espressione della funzione di verosimiglianza di θ , sulla base delle misure $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$.
- b) Calcolare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ sulla base delle misure $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$.