

Corso di STATISTICA MATEMATICA
Prova scritta del 24.7.2006

Candidato:.....

Esercizio 1. Due mazzi di carte identici sono composti da 52 carte (13 per ciascun seme). Si estrae una carta a caso dal primo mazzo e, senza guardarla, la si aggiunge al secondo mazzo. Quindi, si estrae a caso una carta dal secondo mazzo.

- a) Calcolare la probabilità che la prima carta estratta (cioè, dal *primo mazzo*) sia di cuori.
- b) Calcolare la probabilità che la seconda carta estratta (cioè, dal *secondo mazzo*) sia di cuori.
- c) Calcolare la probabilità che si sia estratta una carta di cuori dal primo mazzo sapendo che si è estratta una carta di cuori dal secondo mazzo.

Esercizio 2. Siano \mathbf{x} , \mathbf{y} due variabili aleatorie la cui densità di probabilità congiunta vale

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y) = \begin{cases} cx & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- a) Determinare il valore di c affinché $f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y)$ rappresenti effettivamente una funzione di densità di probabilità.
- b) Calcolare la probabilità $P(\mathbf{x} + \mathbf{y} \leq 1)$.
- c) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\mathbf{x}}(x)$, $f_{\mathbf{y}}(y)$.
- d) Calcolare la media di \mathbf{x} e di \mathbf{y} .
- e) Le variabili aleatorie \mathbf{x} e \mathbf{y} sono indipendenti?

Esercizio 3. Al fine di stimare il valore di un parametro incognito θ , si eseguono tre misure \mathbf{y}_i , corrotte da rumore additivo \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{y}_i = \theta + \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Si supponga che gli errori di misura \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$ siano a media nulla ed abbiano varianza $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 1/2$, $\sigma_3^2 = 1/3$, rispettivamente.

- a) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ sulla base delle tre misure.
- b) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ sulla base delle tre misure.
- c) Stabilire se gli estimatori calcolati ai punti precedenti sono polarizzati.
- d) Calcolare la varianza degli estimatori calcolati ai punti precedenti.