

Corso di STATISTICA MATEMATICA
Prova scritta del 6.7.2006

Candidato:.....

Esercizio 1. Una fabbrica di componenti meccanici vende i propri prodotti in confezioni da 3 unità. Sia \mathbf{x} la variabile aleatoria corrispondente al numero di pezzi difettosi presenti in una stessa confezione. Analizzando i dati in proprio possesso, l'azienda ha stimato la seguente densità di probabilità per \mathbf{x} :

$$f_{\mathbf{x}}(x_i) = \begin{cases} 0.9 & \text{se } x_i = 0 \\ 0.02 & \text{se } x_i = 1 \\ 0.03 & \text{se } x_i = 2 \\ 0.05 & \text{se } x_i = 3 \end{cases}$$

Ai fini di controllare la qualità del processo produttivo, da una confezione viene estratto un pezzo e testato.

- a) Calcolare la probabilità che il pezzo estratto sia difettoso.
- b) Calcolare la probabilità che la confezione contenga esattamente un pezzo difettoso, noto che il pezzo estratto è difettoso.

Esercizio 2. Siano \mathbf{x} , \mathbf{y} due variabili aleatorie la cui densità di probabilità congiunta vale

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x, y) = \begin{cases} cx & \text{se } 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- a) Determinare il valore di c affinché $f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x, y)$ rappresenti effettivamente una funzione di densità di probabilità.
- b) Calcolare la probabilità $P(\mathbf{x} \leq \mathbf{y})$.
- c) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\mathbf{x}}(x)$, $f_{\mathbf{y}}(y)$.
- d) Le variabili aleatorie \mathbf{x} e \mathbf{y} sono indipendenti?
- e) Calcolare la probabilità con cui la v.a. \mathbf{x} assume valori minori di 0.5.
- f) Come si modifica la probabilità calcolata al punto precedente nel caso in cui sia noto che la v.a. \mathbf{y} ha assunto il valore $\mathbf{y} = 0$?

Esercizio 3. Siano \mathbf{y}_1 , \mathbf{y}_2 due variabili aleatorie indipendenti con densità di probabilità

$$f_{\mathbf{y}_1}(y_1) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(y_1-1)} & \text{se } y_1 \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad f_{\mathbf{y}_2}(y_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(y_2-2)} & \text{se } y_2 \geq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove θ è un parametro incognito positivo.

- a) Calcolare al variare di θ il valor medio di \mathbf{y}_1 .
- b) Calcolare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ sulla base delle misure \mathbf{y}_i , $i = 1, 2$.
- c) Stabilire se lo stimatore calcolato al punto precedente è polarizzato.