

**Corso di STATISTICA MATEMATICA**  
**Prova scritta del 6.7.2006**

Candidato:.....

**Esercizio 1.** Una fabbrica di componenti meccanici vende i propri prodotti in confezioni da 3 unità. Sia  $\mathbf{x}$  la variabile aleatoria corrispondente al numero di pezzi difettosi presenti in una stessa confezione. Analizzando i dati in proprio possesso, l'azienda ha stimato la seguente densità di probabilità per  $\mathbf{x}$ :

$$f_{\mathbf{x}}(x_i) = \begin{cases} 0.9 & \text{se } x_i = 0 \\ 0.02 & \text{se } x_i = 1 \\ 0.03 & \text{se } x_i = 2 \\ 0.05 & \text{se } x_i = 3 \end{cases}$$

Ai fini di controllare la qualità del processo produttivo, da una confezione viene estratto un pezzo e testato.

- a) Calcolare la probabilità che il pezzo estratto sia difettoso.
- b) Calcolare la probabilità che la confezione contenga esattamente un pezzo difettoso, noto che il pezzo estratto è difettoso.

**Esercizio 2.** Siano  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  due variabili aleatorie la cui densità di probabilità congiunta vale

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x, y) = \begin{cases} cx & \text{se } 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- a) Determinare il valore di  $c$  affinché  $f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x, y)$  rappresenti effettivamente una funzione di densità di probabilità.
- b) Calcolare la probabilità  $P(\mathbf{x} \leq \mathbf{y})$ .
- c) Calcolare le densità di probabilità marginali  $f_{\mathbf{x}}(x)$ ,  $f_{\mathbf{y}}(y)$ .
- d) Le variabili aleatorie  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono indipendenti?
- e) Calcolare la probabilità con cui la v.a.  $\mathbf{x}$  assume valori minori di 0.5.
- f) Come si modifica la probabilità calcolata al punto precedente nel caso in cui sia noto che la v.a.  $\mathbf{y}$  ha assunto il valore  $\mathbf{y} = 0$ ?

**Esercizio 3.** Siano  $\mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{y}_2$  due variabili aleatorie indipendenti con densità di probabilità

$$f_{\mathbf{y}_1}(y_1) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(y_1-1)} & \text{se } y_1 \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad f_{\mathbf{y}_2}(y_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(y_2-2)} & \text{se } y_2 \geq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove  $\theta$  è un parametro incognito positivo.

- a) Calcolare al variare di  $\theta$  il valor medio di  $\mathbf{y}_1$ .
- b) Calcolare la stima di massima verosimiglianza  $\hat{\theta}_{ML}$  di  $\theta$  sulla base delle misure  $\mathbf{y}_i, i = 1, 2$ .
- c) Stabilire se lo stimatore calcolato al punto precedente è polarizzato.