Corso di STATISTICA MATEMATICA
Esonero finale - 28.6.2006

Candidato:..

Esercizio 1. Si consideri un sistema di trasmissione dati costituito da una sorgente binaria, un canale di comunicazione rumoroso ed un ricevitore (vedi Figura 1). La sorgente emette i bit 0 ed 1 con probabilità $\mathrm{P}(0) = \frac{1}{3}$ e $\mathrm{P}(1) = \frac{2}{3}$, rispettivamente. Il canale di comunicazione trasmette correttamente il bit generato dalla sorgente con probabilità $p = \frac{9}{10}$, mentre, a causa del rumore, trasmette il bit negato con probabilità $1 - p$. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie discrete definite nel seguente modo:

$$\boldsymbol{x} = \begin{cases} 0 & \text{se la sorgente emette il bit 0} \\ 1 & \text{se la sorgente emette il bit 1} \end{cases} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{cases} 0 & \text{se il ricevitore riceve il bit 0} \\ 1 & \text{se il ricevitore riceve il bit 1} \end{cases}$$

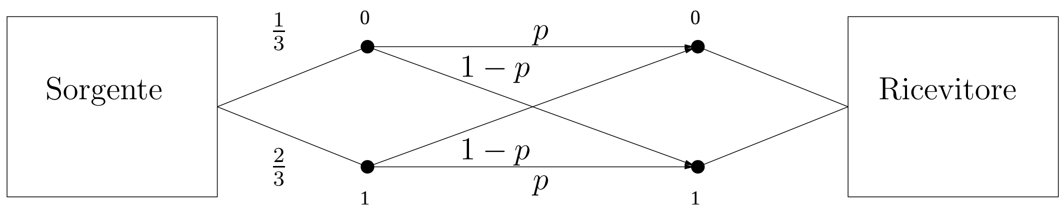

Figura 1: Sistema di trasmissione.

Per ciascuno dei seguenti eventi, si descriva brevemente il significato e si calcoli la probabilità con la quale esso si verifica.

a) $\mathbf{A} = \{\boldsymbol{y} = 1 | \boldsymbol{x} = 1\}$

b) $\mathbf{B} = \{\boldsymbol{y} = 1\}$

c) $\mathbf{C} = \{\boldsymbol{x} = 1 | \boldsymbol{y} = 1\}$

Esercizio 2. Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità

$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in cui c è una costante reale.

a) Determinare il valore di c affinché $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ rappresenti effettivamente una funzione di densità di probabilità.

b) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{x}}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$.

Sia $\boldsymbol{y}$ una seconda variabile aleatoria, ottenuta trasformando la v.a. $\boldsymbol{x}$ nel seguente modo:

$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{\boldsymbol{x}+2}.$$

c) Calcolare la densità di probabilità $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ della v.a. $\boldsymbol{y}$.

Esercizio 3. Siano $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ due variabili aleatorie indipendenti, Gaussiane, con media nulla e varianza $\sigma_{\mathbf{1}}^2 = 1$, $\sigma_{\mathbf{2}}^2 = 2$, rispettivamente. Sul parametro incognito θ vengono effettuate le misure

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= 2\theta + \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 &= 3\theta + \boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$.

a) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2$.

b) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2$.

c) Calcolare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2$.

d) Stabilire se gli stimatori calcolati ai punti precedenti sono polarizzati.

e) Calcolare la varianza degli stimatori calcolati ai punti precedenti.