Corso di STATISTICA MATEMATICA
Prova scritta del 20.4.2006

Candidato:..

Esercizio 1. Un primo programma genera i numeri 1 o 2 con probabilità $\frac{1}{2}$. Un secondo programma, invece, genera il numero 1 con probabilità $\frac{1}{3}$ e il numero 2 con probabilità $\frac{2}{3}$. Un esperimento consiste nel generare un numero con ciascuno dei due programmi, e poi calcolarne la somma. Si indichino con $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ i numeri generati rispettivamente dai due programmi, e $\boldsymbol{z}$ la loro somma.

a) Scrivere la densità di probabilità $f_{\boldsymbol{z}}(z)$ della variabile aleatoria discreta $\boldsymbol{z}$.

b) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{z}}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{z}$.

c) Scrivere la densità di probabilità condizionata $f_{\boldsymbol{x_1}|\boldsymbol{z}}(x_1|z)$ noto che $\boldsymbol{z} = 3$.

Esercizio 2. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie la cui densità di probabilità congiunta vale

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{2(x+\beta y)}{1+\beta} & 0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in cui β è un parametro reale, positivo.

a) Calcolare la probabilità $\mathrm{P}(A)$ dell'evento $A = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{x}\}$.

b) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\boldsymbol{x}}(x)$, $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

c) Determinare il valore β^* del parametro β in corrispondenza del quale le variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ risultano indipendenti.

Sia $\beta = 0$.

d) Calcolare la varianza incrociata $\sigma_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

e) Calcolare la densità di probabilità condizionata $f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}}(x|y)$ di $\boldsymbol{x}$ rispetto a $\boldsymbol{y}$.

Esercizio 3.
Sia $\boldsymbol{y}$ una variabile aleatoria la cui densità di probabilità $f_{\boldsymbol{y}}^{\theta}(y)$ dipende da un parametro incognito positivo θ. L'andamento della $f_{\boldsymbol{y}}^{\theta}(y)$ è mostrato in Figura 1.

a) Scrivere l'espressione della densità di probabilità $f_{\boldsymbol{y}}^{\theta}(y)$.

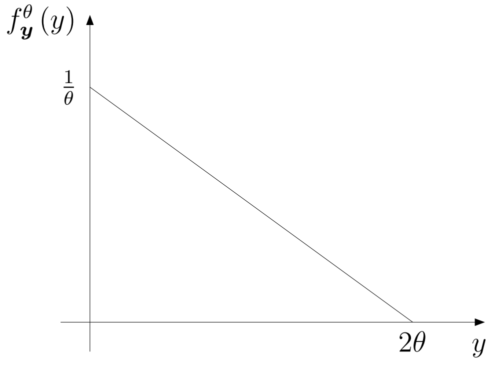

Figura 1: Densità di probabilità $f_{\boldsymbol{y}}^{\theta}(y)$

b) Mostrare che per ogni valore $\theta > 0$ la $f_{\boldsymbol{y}}^{\theta}(y)$ rappresenta effettivamente una densità di probabilità.

c) Calcolare la stima a massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

Esercizio 4.
Un sensore di temperatura con caratteristica lineare fornisce in uscita una tensione proporzionale alla temperatura misurata:

$$\boldsymbol{V} = \alpha T + \boldsymbol{\varepsilon},$$

dove $\boldsymbol{V}$ indica la tensione di uscita, T indica la temperatura reale ed $\boldsymbol{\varepsilon}$ rappresenta il rumore di misura. Al fine di calibrare il sensore, ossia determinare il valore del coefficiente di proporzionalità α, viene effettuato il seguente esperimento. Il sensore viene posto in contatto con tre differenti sorgenti a temperatura costante:

$$T_1 = 1°, \qquad T_2 = 5°, \qquad T_3 = 10°.$$

In corrispondenza di ciascuna sorgente, vengono osservate le seguenti tensioni di uscita:

$$\boldsymbol{V}_1 = 1.9, \qquad \boldsymbol{V}_2 = 11.2, \qquad \boldsymbol{V}_3 = 19.8.$$

Si supponga che i rumori di misura $\boldsymbol{\varepsilon}$ possano essere modellati tramite variabili aleatorie indipendenti, Gaussiane, a media nulla e varianza unitaria.

a) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\alpha}_{LS}$ di α sulla base delle misure $\boldsymbol{V}_i$, $i = 1, 2, 3$.

b) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\alpha}_{GM}$ di α sulla base delle misure $\boldsymbol{V}_i$, $i = 1, 2, 3$.

c) Stabilire se gli stimatori calcolati ai punti precedenti sono polarizzati.

d) Calcolare la varianza $\mathbf{E}\left[(\hat{\alpha} - \alpha)^2\right]$ degli stimatiori calcolati ai punti precedenti.