Corso di STATISTICA MATEMATICA
Prova scritta del 5.12.2005

Candidato:..

Esercizio 1. Un'urna etichettata con A contiene 10 palline bianche e 8 palline rosse. Una pallina viene estratta a caso dall'urna e reintrodotta senza guardarla in una seconda urna etichettata con B, dove sono già presenti 15 palline bianche e 10 palline rosse. Una pallina viene quindi estratta dall'urna B.

a) Calcolare la probabilità p_1 che la pallina estratta dall'urna A sia rossa.

b) Calcolare la probabilità p_2 che la pallina estratta dall'urna B sia rossa.

c) Calcolare la probabilità p_3 che la pallina estratta dall'urna A fosse rossa, noto che la pallina estratta dall'urna B è rossa. Confrontare tale valore con la probabilità p_1 calcolata al punto (a).

Esercizio 2.
Si considerino le funzioni

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x^3 & -1 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{6}x^2 & -1 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

a) Determinare quale delle precedenti funzioni rappresenta effettivamente una funzione di *distribuzione* della probabilità.

Si indichi con $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ la densità di probabilità corrispondente alla distribuzione scelta al punto precedente e sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x)$.

b) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{x}}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$.

Sia $\boldsymbol{y}$ una variabile aleatoria la cui densità di probabilità condizionata (rispetto alla variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$) vale

$$f_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{6} + x^2} & \text{se } -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

c) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{y}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{y}}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

d) Scrivere la matrice di covarianza $R_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

Esercizio 3.
Sul parametro incognito θ vengono effettuate le misure

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= 2\theta + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 &= \theta + \boldsymbol{v}_2 \end{aligned}$$

dove gli errori di misura $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono variabili aleatorie indipendenti. Inoltre, $\boldsymbol{v}_1$ ha una distribuzione Gaussiana, a media nulla e varianza $\sigma_{\mathbf{1}}^2 = 1$, mentre $\boldsymbol{v}_2$ è uniformemente distribuita nell'intervallo $[-1,\ 1]$.

a) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2$.

b) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2$.

c) Stabilire se gli stimatori calcolati ai punti precedenti sono polarizzati.

d) Calcolare la varianza $\mathbf{E}\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]$ degli stimatiori calcolati ai punti precedenti.

Esercizio 4.
La durata (espressa in mesi) di un componente elettronico può essere modellata tramite una v.a. $\boldsymbol{d}$ avente densità di probabilità esponenziale:

$$f_{\boldsymbol{d}}(d) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda d} & d \geq 0 \\ 0 & d < 0 \end{cases}$$

dove λ è un parametro positivo.

a) Calcolare la probabilità che il componente in questione funzioni correttamente per almeno 12 mesi, $\mathrm{P}(\boldsymbol{d} > 12)$.

b) Si supponga che il componente abbia funzionato correttamente per i primi 4 mesi. Calcolare la probabilità che esso continui a funzionare correttamente per almeno altri 12 mesi, $\mathrm{P}(\boldsymbol{d} > 12 + 4 | \boldsymbol{d} > 4)$. Interpretare il risultato ottenuto, confrontandolo con quello calcolato al punto precedente.

Candidato:..

Risultati.

$$\text{Esercizio 1 :}\quad \left[\begin{array}{lll} (a) & : & p_1 = \\ \\ (b) & : & p_2 = \\ \\ (c) & : & p_3 = \\ \end{array}\right.$$

$$\text{Esercizio 2 :}\quad \left[\begin{array}{lll} (a) & : & F_{\boldsymbol{x}}(x) = \\ \\ (b) & : & m_{\boldsymbol{x}} = \qquad\qquad \sigma^2_{\boldsymbol{x}} = \\ \\ (c) & : & m_{\boldsymbol{y}} = \qquad\qquad \sigma^2_{\boldsymbol{y}} = \\ \\ (d) & : & R_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \end{array}\right.$$

$$\text{Esercizio 3 :}\quad \left[\begin{array}{lll} (a) & : & \hat{\theta}_{LS} = \\ \\ (b) & : & \hat{\theta}_{GM} = \\ \\ (c) & : & \text{Polarizzati?} \\ \\ (d) & : & \mathbf{E}\left[(\hat{\theta}_{LS} - \theta)^2\right] = \\ \\ & & \mathbf{E}\left[(\hat{\theta}_{GM} - \theta)^2\right] = \end{array}\right.$$

$$\text{Esercizio 4 :}\quad \left[\begin{array}{lll} (a) & : & \mathrm{P}\left(\boldsymbol{d} > 12\right) = \\ \\ (b) & : & \mathrm{P}\left(\boldsymbol{d} > 12 + 4 | \boldsymbol{d} > 4\right) = \end{array}\right.$$