Corso di STATISTICA MATEMATICA
Prova scritta del 30.9.2005

Candidato:..

Esercizio 1. Tre urne sono inizialmente vuote. Una dopo l'altra, 6 palline vengono introdotte a caso nelle urne (si assuma che la scelta di ciascuna urna sia equiprobabile).

a) Qual è la probabilità p_1 che la prima urna rimanga vuota?

b) Calcolare la probabilità p_2 che nella prima urna ci siano 2 palline, noto che essa non è vuota.

Esercizio 2.
Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie la cui densità di probabilità congiunta vale:

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} c & \text{se } 1 \le x \le e,\ 0 \le y \le \frac{1}{x} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

dove c denota una costante reale.

a) Determinare il valore di c affinché $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y)$ rappresenti effettivamente una densità di probabilità.

b) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\boldsymbol{x}}(x)$, $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$.

c) Stabilire se le variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ sono indipendenti.

d) Calcolare la varianza incrociata $\sigma_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ di $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$.

e) Calcolare la probabilità $\mathrm{P}(A)$ dell'evento $A = \left\{ \boldsymbol{y} \le \dfrac{e^{-1}}{e-1}(\boldsymbol{x}-1) \right\}$.

Esercizio 3.
L'evoluzione temporale della posizione di un veicolo caratterizzato da moto rettilineo uniforme è descritta dall'equazione

$$x(t) = x^0 + vt,$$

dove x^0 indica la posizione iniziale del veicolo e v la sua velocità. Un sensore di prossimità misura la posizione del veicolo in tre diversi istanti di tempo:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(1) &= 10.1\\ \tilde{x}(2) &= 14.8\\ \tilde{x}(3) &= 20.5\end{aligned}$$

dove $\tilde{x}(i)$ rappresenta il valore assunto dalla misura presa all'istante $t = i$. Si supponga che le osservazioni $\tilde{x}(i)$ siano corrotte da rumori additivi $\boldsymbol{\varepsilon}_i$:

$$\tilde{x}(i) = x(i) + \boldsymbol{\varepsilon}_i.$$

I rumori di misura $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, $i = 1, 2, 3$, sono modellabili come variabili aleatorie indipendenti, a media nulla e varianza $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = \frac{3}{2}$, $\sigma_3^2 = 2$, rispettivamente. Sulla base delle misure osservate $\tilde{x}(i)$, $i = 1, 2, 3$

a) calcolare la stima ai minimi quadrati $[\hat{x}^0_{LS} \quad \hat{v}_{LS}]'$ della posizione iniziale e della velocità del veicolo;

b) calcolare la stima di Gauss-Markov $[\hat{x}^0_{GM} \quad \hat{v}_{GM}]'$ della posizione iniziale e della velocità del veicolo;

c) stabilire se le stime ottenute ai punti precedenti sono polarizzate o meno.

Esercizio 4.
Siano $\boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2$ due variabili aleatorie Gaussiane, indipendenti, a media nulla e varianza σ^2 incognita.

a) Scrivere l'espressione della verosimiglianza $L(\sigma^2|y_1 y_2)$ di σ^2 sulla base delle osservazioni $\boldsymbol{y}_1 = y_1$, $\boldsymbol{y}_2 = y_2$.

b) Calcolare la stima a massima verosimiglianza $\hat{\sigma}^2_{ML}$ di σ^2, sulla base delle osservazioni di $\boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2$.