Corso di STATISTICA MATEMATICA
Prova scritta del 15.9.2005

Candidato:..

Esercizio 1. Su 3 facce di un dado non truccato è stampato il numero 1, su 2 facce il numero 2, e su 1 faccia il numero 4. Si indichi con $\boldsymbol{x}$ la variabile aleatoria corrispondente al risultato di un lancio del dado.

a) Calcolare la densità di probabilità discreta $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$, il valore atteso $m_{\boldsymbol{x}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{x}}$.

Il dado viene lanciato n volte. Si indichi con $\boldsymbol{x}_i$ la variabile aleatoria corrispondente al risultato del lancio i-esimo, $i = 1, \ldots, n$.

b) Quanti lanci occorrono affinché la probabilità di ottenere 4 *almeno una volta* sia maggiore del 90%?

Si consideri ora la variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$ corrispondente al rapporto fra il risultato del primo lancio $\boldsymbol{x}_1$ e quello del secondo $\boldsymbol{x}_2$:

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\boldsymbol{x}_2}.$$

c) Calcolare la densità di probabilità discreta $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

Esercizio 2. Si consideri la variabile aleatoria:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v},$$

dove $\boldsymbol{x}$ è una variabile aleatoria Gaussiana a media $m_{\boldsymbol{x}} = 1$ e varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{x}} = 2$, $\boldsymbol{v}$ è una variabile aleatoria Gaussiana a media $m_{\boldsymbol{v}} = 0$ e varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{v}} = 1$. Le variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{v}$ sono inoltre indipendenti.

a) Calcolare la densità di probabilità congiunta $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}}(x, v)$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{v}$. E' una densità nota? In caso affermativo, specificare il valor medio m e la matrice di covarianza C_{xv}.

b) Calcolare il valore atteso $m_{\boldsymbol{y}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{y}}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

c) *[Facoltativo]* Calcolare la densità di probabilità congiunta $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x, y)$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$. *Suggerimento:* Il vettore $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ è una funzione lineare del vettore $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$...

Esercizio 3. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie aventi densità di probabilità congiunta:

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} 2(x+y) & \text{se } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Calcolare la stima a minimo errore quadratico medio $\hat{x}_{MEQM}$ di $\boldsymbol{x}$ sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria $\boldsymbol{y} = y$.

b) Calcolare la stima *lineare* a minimo errore quadratico medio $\hat{x}_{LMEQM}$ di $\boldsymbol{x}$ sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria $\boldsymbol{y} = y$.

Esercizio 4. Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $(0,\ 1)$ e si consideri la variabile aleatoria:

$$\boldsymbol{y} = -\frac{1}{\lambda}\ln(\boldsymbol{x}),$$

in cui λ è una costante reale positiva.

a) Calcolare la densità di probabilità $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

b) La densità di probabilità $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ ha una forma nota? Quanto valgono il valor medio $m_{\boldsymbol{y}}$ e la varianza $\sigma_{\boldsymbol{y}}^2$ di $\boldsymbol{y}$?

Candidato:..

Risultati.

$$\text{Esercizio 1 :}\quad \left[\begin{array}{lcl} (a) & : & f_{\boldsymbol{x}}(x) = \qquad\qquad m_{\boldsymbol{x}} = \qquad \sigma^2_{\boldsymbol{x}} = \\ & : & \\ (b) & : & \#\ lanci = \\ & : & \\ (c) & : & f_{\boldsymbol{y}}(y) = \end{array}\right.$$

$$\text{Esercizio 2 :}\quad \left[\begin{array}{lcl} (a) & : & f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}}(x,v) = \qquad\qquad m = \qquad\qquad C_{xv} = \\ (b) & : & m_{\boldsymbol{y}} = \qquad\qquad \sigma^2_{\boldsymbol{y}} = \\ (c) & : & f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \end{array}\right.$$

$$\text{Esercizio 3 :}\quad \left[\begin{array}{lcl} (a) & : & \hat{x}_{MEQM} = \\ (c) & : & \hat{x}_{LMEQM} = \end{array}\right.$$

$$\text{Esercizio 4 :}\quad \left[\begin{array}{lcl} (a) & : & f_{\boldsymbol{y}}(y) = \\ (b) & : & m_{\boldsymbol{y}} = \qquad\qquad \sigma^2_{\boldsymbol{y}} = \end{array}\right.$$