Corso di STATISTICA MATEMATICA
Prova scritta del 22.7.2005

Candidato:...

Esercizio 1.Una fabbrica produce chip elettronici. Questi escono da due linee di produzione A e B nelle proporzioni del 30% e del 70%, rispettivamente. La linea A ha una percentuale di pezzi difettosi del 10%, contro il 15% della linea B.

a) Qual è la probabilità p_d che un chip scelto a caso sia difettoso?

b) I chip vengono venduti in confezioni di 10 pezzi, tutti prodotti dalla stessa linea. Una confezione viene ispezionata, e risulta contenere esattamente UN SOLO pezzo difettoso. Qual è la probabilità p_A che la confezione provenga dalla linea A? E dalla linea B? Quale delle due eventualità è più probabile?

Esercizio 2. Si considerino le funzioni

$$f_{\mathbf{1}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+2) & -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_{\mathbf{2}}(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x & -2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

a) Determinare quale delle precedenti funzioni rappresenta effettivamente una densità di probabilità.

Si indichi con $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ la funzione scelta al punto precedente e sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x)$.

b) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{x}}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$.

Sia $\boldsymbol{y}$ una variabile aleatoria la cui densità di probabilità condizionata (rispetto alla variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$) vale

$$f_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{4y+x}{x+2} & \text{se } -2 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

c) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{y}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{y}}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

d) Scrivere la matrice di covarianza $R_{\boldsymbol{z}}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]'$.

e) Calcolare la probabilità $\mathrm{P}\left(\boldsymbol{y} \leq \frac{1}{2}\boldsymbol{x}\right)$.

Esercizio 3. Siano $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ due variabili aleatorie indipendenti, con media nulla e varianza $\sigma_{\boldsymbol{1}}^2 = 1$, $\sigma_{\boldsymbol{2}}^2 = 2$, rispettivamente. Sul parametro incognito θ vengono effettuate le misure

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \theta + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 &= 2\theta + \boldsymbol{v}_2 \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$.

a) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2$.

b) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2$.

c) Stabilire se gli stimatori calcolati ai punti precedenti sono polarizzati.

Esercizio 4. Sia $\boldsymbol{y}$ una variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f_{\boldsymbol{y}}^{\theta}(y) = \begin{cases} \frac{2}{3\theta^2} y & \text{se } 0 \leq y \leq \theta \\ \frac{2}{3\theta} & \text{se } \theta \leq y \leq 2\theta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in cui θ è un parametro incognito positivo.

a) Scrivere l'espressione della verosimiglianza $L(\theta|y)$ di θ sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

a) Calcolare la stima a massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

Candidato:...

Risultati.

$$\text{Esercizio 1 :}\quad \left[\begin{array}{lcl} (a) & : & p_d = \\ & \vdots & \\ (a) & : & p_A = \qquad p_B = \end{array}\right.$$

$$\text{Esercizio 2 :}\quad \left[\begin{array}{lcl} (a) & : & f_{\boldsymbol{x}}(x) = \\ (b) & : & m_{\boldsymbol{x}} = \qquad \sigma^2_{\boldsymbol{x}} = \\ (c) & : & m_{\boldsymbol{y}} = \qquad \sigma^2_{\boldsymbol{y}} = \\ (d) & : & R_{\boldsymbol{z}} = \\ (e) & : & P = \end{array}\right.$$

$$\text{Esercizio 3 :}\quad \left[\begin{array}{lcl} (a) & : & \hat{\theta}_{LS} = \\ (b) & : & \hat{\theta}_{GM} = \\ (c) & : & \text{Polarizzati?} \end{array}\right.$$

$$\text{Esercizio 4 :}\quad \left[\begin{array}{lcl} (a) & : & L(\theta|y) = \\ (b) & : & \hat{\theta}_{ML} = \end{array}\right.$$