Corso di STATISTICA MATEMATICA
Prova scritta del 6.7.2005

Candidato:...

Esercizio 1. Un lotto contenente 1000 transistor è composto da 700 unità prodotte nello stabilimento A_1, 200 unità nello stabilimento A_2 e 100 nello stabilimento A_3. Si indichi con p_i la probabilità che un transistor proveniente dallo stabilimento A_i, $i = 1, 2, 3$, funzioni correttamente. Si consideri l'estrazione casuale di un pezzo dal lotto in esame. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie definite come segue:

$$\boldsymbol{x} = i \quad \text{se il transistor estratto proviene dallo stabilimento } A_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{cases} 1 & \text{se il transistor estratto funziona correttamente} \\ 0 & \text{se il transistor estratto è difettoso} \end{cases}$$

Per ciascuno dei seguenti eventi, si descriva brevemente il significato e si calcoli la probabilità con la quale si verifica:

a) $A = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (3, 1)\}$

b) $B = \{\boldsymbol{y} = 1 | \boldsymbol{x} = 3\}$

c) $C = \{\boldsymbol{x} = 3 | \boldsymbol{y} = 1\}$

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x, y) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{1}{x^2} + y\right) & \text{se } 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in cui α è una costante reale.

a) Determinare il valore di α affinché $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x, y)$ rappresenti una funzione di densità di probabilità.

Siano $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie con densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x, y)$.

b) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\boldsymbol{x}}(x)$, $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$.

c) Stabilire se le variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ sono indipendenti.

d) Calcolare la densità di probabilità condizionata $f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}}(x|y)$.

e) Calcolare la probabilità $\mathrm{P}(A)$ dell'evento $A = \{\boldsymbol{x} \leq 3/2\}$.

f) Come si modifica la probabilità dell'evento A nel caso in cui sia noto che la variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$ ha assunto il valore $\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}$?

Esercizio 3. Sia $\boldsymbol{y}$ una variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f_{\boldsymbol{y}}^{\theta}(y) = \begin{cases} \theta^2 (y-3) e^{-\theta(y-3)} & \text{se } y \geq 3 \\ 0 & \text{se } y < 3 \end{cases}$$

in cui θ rappresenta un parametro incognito positivo.

a) Calcolare la stima a massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

b) Verificare che la stima calcolata al punto precedente è polarizzata.

c) Calcolare uno stimatore non polarizzato del parametro θ.

Esercizio 4. Siano $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ variabili aleatorie indipendenti, congiuntamente Gaussiane con valor medio

$$\mathbf{E}[\boldsymbol{e}_1] = 1, \quad \mathbf{E}[\boldsymbol{e}_2] = 0, \quad \mathbf{E}[\boldsymbol{e}_3] = 0$$

e varianza

$$\sigma_{\boldsymbol{e_1}}^2 = 2, \quad \sigma_{\boldsymbol{e_2}}^2 = 1, \quad \sigma_{\boldsymbol{e_3}}^2 = 2.$$

Si considerino le variabili aleatorie

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$$

a) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ e la varianza $\sigma_{\boldsymbol{x}}^2$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$.

b) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{y}}$ e la varianza $\sigma_{\boldsymbol{y}}^2$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

c) Calcolare la varianza incrociata $\sigma_{\boldsymbol{xy}}$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

d) Calcolare la stima *lineare* a minimo errore quadratico medio $\hat{\boldsymbol{x}}_{LMEQM}$ di $\boldsymbol{x}$ sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

e) Scrivere l'espressione della densità di probabilità congiunta $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x, y)$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

f) Calcolare la stima a minimo errore quadratico medio $\hat{\boldsymbol{x}}_{MEQM}$ di $\boldsymbol{x}$ sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

Candidato:...

Risultati.

$$\textbf{Esercizio 1}: \left[\begin{array}{lll} (a) & : & \mathrm{P}(A) \\ (b) & : & \mathrm{P}(B) \\ (c) & : & \mathrm{P}(C) \end{array}\right.$$

$$\textbf{Esercizio 2}: \left[\begin{array}{lll} (a) & : & \alpha = \\ (b) & : & f_{\boldsymbol{x}}(x) = \qquad\qquad f_{\boldsymbol{y}}(y) = \\ (c) & : & \text{Indipendenti?} \\ (d) & : & f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}}(x|y) = \\ (e) & : & \mathrm{P}(A) = \\ (f) & : & \mathrm{P}(A) = \end{array}\right.$$

$$\textbf{Esercizio 3}: \left[\begin{array}{lll} (a) & : & \hat{\theta}_{ML} = \\ (b) & : & \text{Polarizzato}: \\ (c) & : & \text{Stimatore non polarizzato} = \end{array}\right.$$

$$\textbf{Esercizio 4}: \left[\begin{array}{lll} (a) & : & m_{\boldsymbol{x}} = \qquad\qquad \sigma^2_{\boldsymbol{x}} = \\ & \vdots & \\ (b) & : & m_{\boldsymbol{y}} = \qquad\qquad \sigma^2_{\boldsymbol{y}} = \\ & \vdots & \\ (c) & : & \sigma_{\boldsymbol{xy}} = \\ & \vdots & \\ (d) & : & \hat{\boldsymbol{x}}_{LMEQM} = \\ & \vdots & \\ (e) & : & f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \\ & \vdots & \\ (e) & : & \hat{\boldsymbol{x}}_{MEQM} = \end{array}\right.$$