Corso di STATISTICA MATEMATICA
Esonero finale - 28.6.2005

Candidato:..

Esercizio 1. Una moneta d'oro ed una d'argento sono esternamente identiche. È noto che per la moneta d'argento ciascuna delle due facce (testa e croce) ha la stessa probabilità di manifestarsi durante un lancio. Per quanto riguarda la moneta d'oro, invece, la probabilità che un lancio dia come esito testa vale $\frac{3}{4}$. Volendo stabilire quale delle due sia la moneta d'oro, si adotta la seguente strategia. Si sceglie una moneta a caso e la si lancia 4 volte. Se il numero di volte in cui il risultato è stato testa è maggiore di 2 si decide che quella lanciata è la moneta d'oro, altrimenti si opta per l'altra. Si indichi con $\boldsymbol{x}$ la variabile aleatoria corrispondente al numero di volte in cui si è manifestata la faccia testa durante i 4 lanci.

a) Scrivere l'espressione della densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ di $\boldsymbol{x}$, supponendo di lanciare la moneta d'oro.

b) Calcolare la probabilità che si verifichi testa per non più di 2 volte, $\mathrm{P}(\boldsymbol{x} \leq 2)$, supponendo di lanciare la moneta d'oro.

c) Scrivere l'espressione della densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ di $\boldsymbol{x}$, supponendo di lanciare la moneta d'argento.

d) Calcolare la probabilità che si verifichi testa per più di 2 volte, $\mathrm{P}(\boldsymbol{x} > 2)$, supponendo di lanciare la moneta d'argento.

e) Calcolare la probabilità che con la strategia adottata si commetta un'errore (ossia, si scelga erroneamente la moneta d'argento).

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} cx^2y & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in cui c è una costante reale.

a) Determinare il valore di c affinché $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y)$ rappresenti una funzione di densità di probabilità.

Siano $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie con densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y)$.

b) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\boldsymbol{x}}(x)$, $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$.

c) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{x}}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$.

d) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{y}}$ e la varianza $\sigma_{\boldsymbol{y}}^2$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

e) Stabilire se le variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ sono indipendenti e/o scorrelate.

f) Scrivere la matrice di covarianza R della variabile aleatoria vettoriale $[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]'$.

Esercizio 3. Per stimare il valore della massa m di un cubo si utilizzano tre diverse bilance, ciascuna delle quali fornisce una misura $\boldsymbol{M}_i$ della massa incognita, corrotta da rumore additivo $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. Si supponga che i rumori di misura $\boldsymbol{e}_i$ siano modellabili come variabili aleatorie indipendenti, Gaussiane, a media nulla e varianza $\sigma_{\mathbf{1}}^2 = 1$, $\sigma_{\mathbf{2}}^2 = 2$ e $\sigma_{\mathbf{3}}^2 = 3$, rispettivamente.

a) Stabilire quale dei seguenti stimatori è corretto oppure polarizzato:

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{3}\boldsymbol{M}_1 + \frac{4}{3}\boldsymbol{M}_2 - \frac{2}{3}\boldsymbol{M}_3; \qquad \hat{m}_2 = \boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_2.$$

b) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{m}_{LS}$ di m sulla base delle misure $\boldsymbol{M}_i$, $i = 1, 2, 3$, e stabilire se è polarizzata.

c) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{m}_{GM}$ di m sulla base delle misure $\boldsymbol{M}_i$, $i = 1, 2, 3$, e stabilire se è polarizzata.

d) Calcolare la stima di massima verosimiglianza $\hat{m}_{ML}$ di m sulla base delle misure $\boldsymbol{M}_i$, $i = 1, 2, 3$, e stabilire se è polarizzata.

e) Quale tra gli stimatori calcolati nei punti $(b), (c), (d)$ ha varianza $E[(\hat{m} - m)^2]$ minore? Quanto vale tale varianza?

Esercizio 4. Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e si consideri una seconda variabile aleatoria $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^2$.

a) Calcolare la densità di probabilità $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

b) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{y}}$ e la varianza $\sigma_{\boldsymbol{y}}^2$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

Candidato:...

Risultati.

$$\textbf{Esercizio 1}: \left[\begin{array}{lll} (a) & : & f_{\boldsymbol{x}}(x) = \\ (b) & : & \mathrm{P}(\boldsymbol{x} \leq 2) = \\ (c) & : & f_{\boldsymbol{x}}(x) = \\ (d) & : & \mathrm{P}(\boldsymbol{x} > 2) = \\ (e) & : & \mathrm{P}(\text{ Errore }) = \end{array}\right.$$

$$\textbf{Esercizio 2}: \left[\begin{array}{llll} (a) & : & c = & \\ (b) & : & f_{\boldsymbol{x}}(x) = & f_{\boldsymbol{y}}(y) = \\ (c) & : & m_{\boldsymbol{x}} = & \sigma^2_{\boldsymbol{x}} = \\ (d) & : & m_{\boldsymbol{y}} = & \sigma^2_{\boldsymbol{y}} = \\ (e) & : & \text{Indipendenti?} & \text{Scorrelate?} \\ (f) & : & R = & \end{array}\right.$$

$$\textbf{Esercizio 3}: \left[\begin{array}{llll} (a) & : & \text{Stimatore 1 :} & \text{Stimatore 2 :} \\ (b) & : & \text{Stimatore LS} = & \\ (c) & : & \text{Stimatore GM} = & \\ (d) & : & \text{Stimatore ML} = & \\ (e) & : & \text{Stimatore con varianza minore :} & \text{Varianza} = \end{array}\right.$$

$$\textbf{Esercizio 4}: \left[\begin{array}{llll} (a) & : & f_{\boldsymbol{y}}(y) = & \\ & : & & \\ (a) & : & m_{\boldsymbol{y}} = & \sigma^2_{\boldsymbol{y}} = \end{array}\right.$$