Corso di STATISTICA MATEMATICA
Prova scritta del 20.1.2005

Candidato:..

Esercizio 1. Tre urne contengono 10 palline ciascuna. Le palline nell'urna A sono contrassegnate con i numeri che vanno dall'1 al 10, quelle nell'urna B con i numeri che vanno dal 4 al 13, mentre quelle nell'urna C sono numerate da 6 a 15. Si sceglie un'urna a caso (tra di loro equiprobabili) e si estrae una pallina. Sia $\boldsymbol{x}$ la variabile aleatoria discreta corrispondente al numero stampato sulla pallina estratta.

a) Calcolare la probabilità che il numero estratto sia 10, $\mathrm{P}(\boldsymbol{x} = 10)$.

b) Calcolare il numero estratto sia compreso tra 11 e 13, $\mathrm{P}(11 \leq \boldsymbol{x} \leq 13)$.

c) Calcolare la probabilità che si sia scelta l'urna A, sapendo che l'esito dell'estrazione è stato $\boldsymbol{x} = 5$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \begin{cases} \gamma^2 - \frac{16}{9}x^2 & \text{se } -\frac{3}{4}\gamma \leq x < \frac{3}{4}\gamma \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in cui γ è un numero reale positivo.

a) Determinare il valore di γ per cui $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ rappresenta effettivamente una funzione di densità di probabilità.

b) Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x)$. Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{x}}$ di $\boldsymbol{x}$.

Esercizio 3. Sia θ una grandezza incognita, relativamente alla quale sono disponibili tre diverse misure:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \theta + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 &= -\theta + \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 &= 2\theta + \boldsymbol{v}_3 \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, 2$, sono variabili aleatorie gaussiane, a media nulla e varianza $\sigma_i^2 = 1$, mentre $\boldsymbol{v}_3$ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$. Si supponga che i rumori di misura $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, siano tra di loro indipendenti.

a) Stabilire quale dei seguenti stimatori è corretto oppure polarizzato:

$$\hat{\theta}_1 = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3; \quad \hat{\theta}_2 = \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_3; \quad \hat{\theta}_3 = \frac{\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3}{2}; \quad \hat{\theta}_4 = \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3$$

b) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, e stabilire se è polarizzata.

c) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, e stabilire se è polarizzata.

d) Calcolare la varianza degli errori di stima $E[(\theta - \hat{\theta})^2]$, per le stime calcolate ai punti *b*) e *c*).

Esercizio 4. Siano $\boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2$ due variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite, con densità di probabilità:

$$f^{\theta}_{\boldsymbol{y_i}}(y_i) = \begin{cases} e^{-(y_i-\theta)} & \text{se } y_i \geq \theta \\ 0 & \text{se } y_i < \theta \end{cases}$$

dove $\theta \geq 0$ è un parametro incognito. Avendo osservato per le v.a. $\boldsymbol{y}_i$ le realizzazioni $\boldsymbol{y}_1 = \bar{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2 = \bar{y}_2$:

a) scrivere l'espressione della verosimiglianza $L(\theta|\bar{y}_1\bar{y}_2)$;

b) calcolare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ sulla base delle osservazioni disponibili.