

Corso di STATISTICA MATEMATICA
Prova scritta del 15.12.2004

Candidato:.....

Esercizio 1. Si consideri l'esperimento consistente nel lancio contemporaneo di due dadi. Uno di essi è un dado non truccato, ovvero ciascuna faccia ha la stessa probabilità di manifestarsi. L'altro dado, invece, è truccato e la probabilità $P(i)$ associata all'esito della faccia i -esima vale:

$$P(i) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{se } i = 1, \dots, 5 \\ \frac{1}{2} & \text{se } i = 6 \end{cases}$$

- a) Calcolare la probabilità che la somma dei numeri risultanti dall'esperimento sia pari a 10.
- b) Si considerino n ripetizioni indipendenti dell'esperimento precedente e sia \mathbf{x} una variabile aleatoria corrispondente al numero di volte che il lancio ha dato esito pari a 10. Scrivere l'espressione della densità di probabilità $f_{\mathbf{x}}(x)$ della variabile aleatoria \mathbf{x} .
- c) Scelto uno dei due dadi a caso e lanciato, calcolare la probabilità che esso sia il dado truccato noto che l'esito del lancio è stato 6.

Esercizio 2. Sia \mathbf{y} una variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f_{\mathbf{y}}^{\theta}(y) = \begin{cases} c(y + \frac{3}{2} - \theta) & \text{se } \theta - \frac{3}{2} \leq y \leq \theta + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\theta \in \mathbb{R}$ rappresenta un parametro incognito.

- a) Calcolare il valore di c affinché $f_{\mathbf{y}}^{\theta}(y)$ sia effettivamente una densità di probabilità.
- b) Calcolare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ .
- c) Stabilire se lo stimatore calcolato al punto precedente è polarizzato o meno.

Esercizio 3. Sia \mathbf{x} una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, 1]$. Si considerino le due variabili aleatorie

$$\mathbf{y} = \ln\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right), \quad \mathbf{z} = e^{\mathbf{y}}.$$

- a) Calcolare la densità di probabilità $f_{\mathbf{y}}(y)$ della v.a. \mathbf{y} .
- b) Calcolare la densità di probabilità $f_{\mathbf{z}}(z)$ della v.a. \mathbf{z} .

Esercizio 4. Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} due variabili aleatorie aventi densità di probabilità congiunta:

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9}y & \text{se } y \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- a) Calcolare la densità di probabilità marginale $f_{\mathbf{y}}(y)$ della v.a. \mathbf{y} .
- b) Calcolare il valor medio $m_{\mathbf{y}}$ e la varianza $\sigma_{\mathbf{y}}^2$ della v.a. \mathbf{y} .
- c) Calcolare la stima a minimo errore quadratico medio \hat{x}_{MEQM} di \mathbf{x} sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria $\mathbf{y} = y$.

Risultati.

Esercizio 1 :
$$\begin{cases} (a) : P(10) = \\ (b) : f_{\mathbf{x}}(i) = & i = 0, 1, \dots, n \\ (c) : P(\text{truccato} \mid 6) = \end{cases}$$

Esercizio 2 :
$$\begin{cases} a) : c = \\ b) : \hat{\theta}_{ML} = \\ c) : \hat{\theta}_{ML} \text{ polarizzato?} \end{cases}$$

Esercizio 3 :
$$\begin{cases} (a) : f_{\mathbf{y}}(y) = \\ (b) : f_{\mathbf{z}}(z) = \end{cases}$$

Esercizio 4 :
$$\begin{cases} (a) : f_{\mathbf{y}}(y) = \\ (b) : m_{\mathbf{y}} = \\ \sigma_{\mathbf{y}}^2 = \\ (c) : \hat{x}_{MEQM} = \end{cases}$$