

**Corso di STATISTICA MATEMATICA**  
**Prova scritta del 15.12.2004**

Candidato:.....

**Esercizio 1.** Si consideri l'esperimento consistente nel lancio contemporaneo di due dadi. Uno di essi è un dado non truccato, ovvero ciascuna faccia ha la stessa probabilità di manifestarsi. L'altro dado, invece, è truccato e la probabilità  $P(i)$  associata all'esito della faccia  $i$ -esima vale:

$$P(i) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{se } i = 1, \dots, 5 \\ \frac{1}{2} & \text{se } i = 6 \end{cases}$$

- a) Calcolare la probabilità che la somma dei numeri risultanti dall'esperimento sia pari a 10.
- b) Si considerino  $n$  ripetizioni indipendenti dell'esperimento precedente e sia  $\mathbf{x}$  una variabile aleatoria corrispondente al numero di volte che il lancio ha dato esito pari a 10. Scrivere l'espressione della densità di probabilità  $f_{\mathbf{x}}(x)$  della variabile aleatoria  $\mathbf{x}$ .
- c) Scelto uno dei due dadi a caso e lanciato, calcolare la probabilità che esso sia il dado truccato noto che l'esito del lancio è stato 6.

**Esercizio 2.** Sia  $\mathbf{y}$  una variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f_{\mathbf{y}}^{\theta}(y) = \begin{cases} c(y + \frac{3}{2} - \theta) & \text{se } \theta - \frac{3}{2} \leq y \leq \theta + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove  $\theta \in \mathbb{R}$  rappresenta un parametro incognito.

- a) Calcolare il valore di  $c$  affinché  $f_{\mathbf{y}}^{\theta}(y)$  sia effettivamente una densità di probabilità.
- b) Calcolare la stima di massima verosimiglianza  $\hat{\theta}_{ML}$  di  $\theta$ .
- c) Stabilire se lo stimatore calcolato al punto precedente è polarizzato o meno.

**Esercizio 3.** Sia  $\mathbf{x}$  una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo  $[0, 1]$ . Si considerino le due variabile aleatorie

$$\mathbf{y} = \ln\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right), \quad \mathbf{z} = e^{\mathbf{y}}.$$

- a) Calcolare la densità di probabilità  $f_{\mathbf{y}}(y)$  della v.a.  $\mathbf{y}$ .
- b) Calcolare la densità di probabilità  $f_{\mathbf{z}}(z)$  della v.a.  $\mathbf{z}$ .

**Esercizio 4.** Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  due variabili aleatorie aventi densità di probabilità congiunta:

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{9}y & \text{se } y \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Calcolare la densità di probabilità marginale  $f_{\mathbf{y}}(y)$  della v.a.  $\mathbf{y}$ .
- Calcolare il valor medio  $m_{\mathbf{y}}$  e la varianza  $\sigma_{\mathbf{y}}^2$  della v.a.  $\mathbf{y}$ .
- Calcolare la stima a minimo errore quadratico medio  $\hat{x}_{MEQM}$  di  $\mathbf{x}$  sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria  $\mathbf{y} = y$ .

**Risultati.**

$$\text{Esercizio 1 : } \left[ \begin{array}{ll} (a) & : \text{ P}(10) = \\ (b) & : f_{\mathbf{x}}(i) = \\ (c) & : \text{P}(\text{truccato} \mid 6) = \end{array} \right. \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\text{Esercizio 2 : } \left[ \begin{array}{ll} a) & : c = \\ b) & : \hat{\theta}_{ML} = \\ c) & : \hat{\theta}_{ML} \text{ polarizzato?} \end{array} \right.$$

$$\text{Esercizio 3 : } \left[ \begin{array}{ll} (a) & : f_{\mathbf{y}}(y) = \\ (b) & : f_{\mathbf{z}}(z) = \end{array} \right.$$

$$\text{Esercizio 4 : } \left[ \begin{array}{ll} (a) & : f_{\mathbf{y}}(y) = \\ (b) & : m_{\mathbf{y}} = \\ & \sigma_{\mathbf{y}}^2 = \\ (c) & : \hat{x}_{MEQM} = \end{array} \right.$$