Corso di STATISTICA MATEMATICA
Prova scritta del 23.9.2004

Candidato:..

Esercizio 1. In una scatola nera sono contenuti due mazzi di carte. Il primo mazzo contiene 3 carte con i numeri 1, 3 e 4. Il secondo mazzo contiene 4 carte con i numeri 1, 2, 3 e 5. Senza guardare, un bambino sceglie in maniera equiprobabile un mazzo dalla scatola, ed estrae una carta dal mazzo. Sia $\boldsymbol{x}$ la variabile aleatoria discreta corrispondente al numero della carta estratta.

a) Determinare la funzione di densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x_i)$ e tracciarne il grafico.

b) Determinare la funzione di distribuzione di probabilità $F_{\boldsymbol{x}}(x)$ e tracciarne il grafico.

c) Determinare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$.

d) Noto che l'esito dell'estrazione della carta ha dato $\boldsymbol{x} = 1$, calcolare la probabilità *a posteriori* di aver scelto il primo mazzo. Confrontare questo valore con la probabilità *a priori*, e spiegare intuitivamente il risultato.

Esercizio 2. Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f_{\boldsymbol{x}}^{\theta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta + x}{\theta + 1} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove θ rappresenta un parametro incognito.

a) Mostrare che per ogni valore $\theta \geq 0$, $f_{\boldsymbol{x}}^{\theta}(x)$ rappresenta una densità di probabilità.

b) Supponendo $\theta \in [0,\ 4]$, calcolare la stima a massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ sulla base dell'osservazione $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3. Sia θ un parametro incognito, relativamente al quale sono disponibili due misure:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \theta + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 &= 3\theta + \boldsymbol{v}_2 \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ rappresentano gli errori di misura, che possono essere supposti indipendenti. Sia

$$f_{\boldsymbol{v_1}}(v_1) = \begin{cases} 1 + v_1 & \text{se } -1 \leq v_1 \leq 0 \\ 1 - v_1 & \text{se } 0 < v_1 \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità di probabilità di $\boldsymbol{v}_1$ e $\sigma_{\boldsymbol{v_2}}^2 = \frac{1}{2}$ la varianza di $\boldsymbol{v}_2$.

a) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ sulla base delle osservazioni $\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2$.

b) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ sulla base delle osservazioni $\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2$.

c) C'è differenza fra le stime calcolate ai punti precedenti? Perché?

Esercizio 4. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie aventi densità di probabilità congiunta:

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(x^2+y) & \text{se } -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Calcolare la stima a minimo errore quadratico medio $\hat{x}_{MEQM}$ di $\boldsymbol{x}$ sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria $\boldsymbol{y} = y$.

b) Verificare che la stima lineare a minimo errore quadratico medio $\hat{x}_{LMEQM}$ di $\boldsymbol{x}$ sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria $\boldsymbol{y} = y$ vale

$$\hat{x}_{LMEQM} = m_{\boldsymbol{x}}, \qquad \forall y$$

dove $m_{\boldsymbol{x}}$ denota il valor medio di $\boldsymbol{x}$.