Corso di STATISTICA MATEMATICA
Prova scritta del 9.9.2004

Candidato:..

Esercizio 1. Si consideri un esperimento che consiste nel lancio di due monete non truccate. Siano $\boldsymbol{x}_i$, $i \in \{1, 2\}$, due variabili aleatorie discrete che assumono i seguenti valori:

$$\boldsymbol{x}_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'esito del lancio della moneta } i\text{-esima è testa} \\ 0 & \text{se l'esito del lancio della moneta } i\text{-esima è croce} \end{cases}$$

I) Per ciascuno dei seguenti eventi:

1. $A = \{(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2) = (1, 1)\}$
2. $B = \{(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2) = (1, 1) \mid \boldsymbol{x}_1 = 1\}$
3. $C = \{(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2) = (1, 1) \mid (\boldsymbol{x}_1 = 1) \cup (\boldsymbol{x}_2 = 1)\}$

descrivere brevemente il significato e calcolare la probabilità con cui si verifica.

Esercizio 2. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie scalari aventi densità di probabilità congiunta

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x, y) = \begin{cases} \alpha e^{-(x+y)} & \text{se } 0 \le x \le \ln 2 \;\text{ e }\; 0 \le y \le \ln 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I) Determinare il valore di α affinché la $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x, y)$ sia effettivamente una densità di probabilità.

II) Le variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sono indipendenti? Perché?

III) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{z}}$ e la matrice di covarianza $R_{\boldsymbol{z}}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]'$.

Esercizio 3. Sia $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2]'$ una variabile aleatoria (vettoriale) Gaussiana, a media nulla. Di seguito sono riportate quattro possibili matrici di covarianza della v.a. $\boldsymbol{x}$:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 9 & 5.4 \\ 5.4 & 4 \end{bmatrix} \quad R_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad R_4 = \begin{bmatrix} 9 & -5.4 \\ -5.4 & 4 \end{bmatrix}$$

I) Per ciascuna matrice R_i, $i = 1, \ldots, 4$, dire se le v.a. $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ sono indipendenti o meno. Giustificare la risposta.

II) In Figura 1 sono riportate 5000 realizzazioni della v.a. $\boldsymbol{x}$, generate in corrispondenza di ciascuna matrice di covarianza R_i, $i = 1, \ldots, 4$. Associare ciascun grafico $(a), \ldots, (d)$ alla corrispondente matrice di covarianza R_i. Giustificare la risposta.

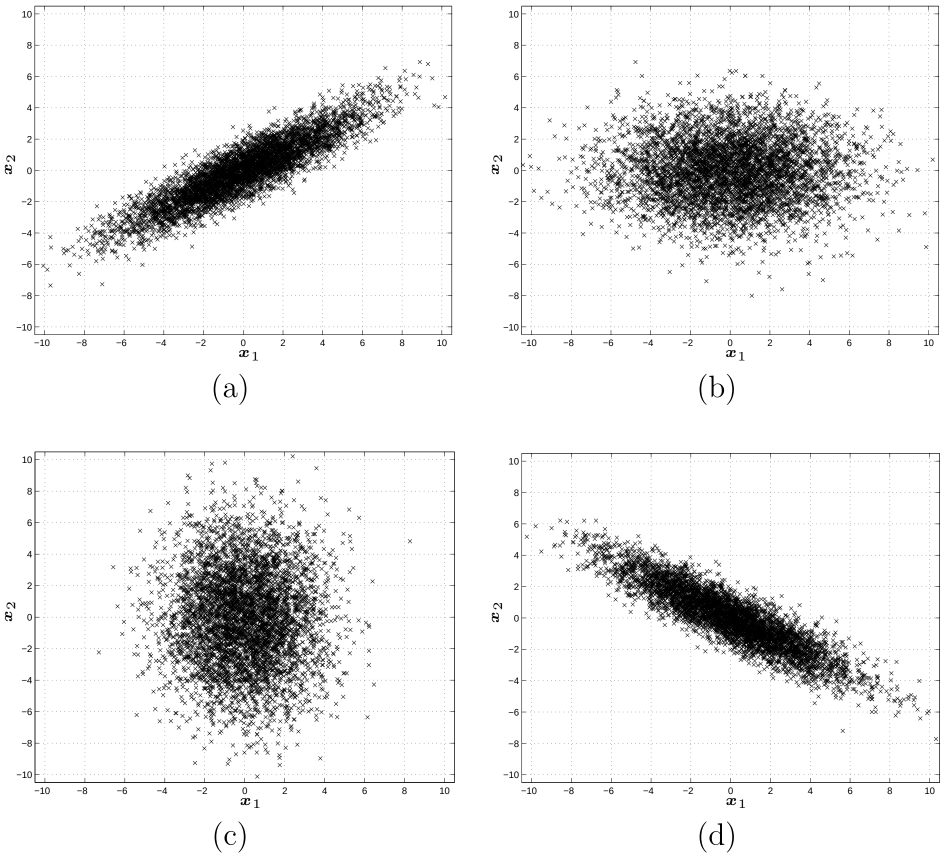

Figura 1.

Esercizio 4. Un'azienda manifatturiera deve acquistare, per il proprio processo produttivo, un sistema per la misurazione di un parametro θ. Sono disponibili due alternative.

1. Utilizzare un sensore S1 molto accurato, che fornisce una misura di θ corrotta da rumore additivo Gaussiano, a media nulla e varianza $\sigma_{\mathbf{1}}^2 = 7$. Tale sistema ha un costo pari a $C_1 = 1000$ **€**.

2. Utilizzare un sistema composto da n sensori S2 più economici, ciascuno dei quali fornisce una misura di θ corrotta da rumore additivo Gaussiano, a media nulla e varianza $\sigma_{\mathbf{2}}^2 = 30$.

Si indichi con C_2 il costo unitario del sensore S2 e si supponga che i rumori di misura siano tra di loro indipendenti.

I) Supponendo di usare lo stimatore ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ per fondere le n misure del secondo sistema di misura, calcolare il massimo valore di C_2 affinché la seconda alternativa risulti più conveniente rispetto alla prima, vale a dire abbia varianza di stima minore e costo totale inferiore.

II) Come cambia la risposta al punto precedente nell'ipotesi in cui si usi lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$? Perché?