Corso di STATISTICA MATEMATICA
Prova scritta del 6.7.2004

Candidato:..

Esercizio 1. Tre urne contengono 30 palline ciascuna. Nell'urna A si trovano 10 palline contrassegnate col numero 1 e 20 col numero 2, nell'urna B si trovano 15 palline col numero 2 e 15 col numero 3, mentre nell'urna C si trovano 15 palline col numero 1 e 15 col numero 3. Si sceglie un'urna a caso (tra di loro equiprobabili) e si estrae una pallina. Sia $\boldsymbol{x}$ la variabile aleatoria discreta corrispondente al numero stampato sulla pallina estratta.

a) Calcolare la probabilità che il numero estratto sia 1, $\mathrm{P}(\boldsymbol{x} = 1)$.

b) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ di $\boldsymbol{x}$.

c) Calcolare la probabilità che si sia scelta l'urna A, sapendo che l'esito dell'estrazione è stato $\boldsymbol{x} = 1$.

Esercizio 2. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie aventi densità di probabilità congiunta:

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(x^2 + y) & \text{se } -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\boldsymbol{x}}(x)$, $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

b) Calcolare i valori medi $m_{\boldsymbol{x}}$, $m_{\boldsymbol{y}}$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

c) Calcolare le varianze $\sigma^2_{\boldsymbol{x}}$, $\sigma^2_{\boldsymbol{y}}$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

d) Stabilire se le variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sono correlate o meno.

Esercizio 3. Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[-1,\ 1]$ e si consideri la nuova variabile aleatoria $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^3$.

a) Calcolare la densità di probabilità $f_{\boldsymbol{z}}(z)$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{z}$.

b) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{z}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{z}}$ di $\boldsymbol{z}$.

Sia θ una grandezza incognita, relativamente alla quale sono disponibili due misure:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \theta + \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{y}_2 &= 2\theta + \boldsymbol{z} \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{e}$ è una variabile aleatoria gaussiana, a media nulla e varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{e}} = 2$, mentre $\boldsymbol{z}$ è la variabile aleatoria considerata in precedenza. Si supponga che i rumori di misura $\boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{z}$ siano tra di loro indipendenti.

c) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2$, e stabilire se è polarizzata.

d) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2$, e stabilire se è polarizzata.

Esercizio 4. Si consideri la funzione

$$f_{\boldsymbol{y}}^{\theta}(y) = \begin{cases} 2(y + \frac{2}{3} - \theta) & \text{se } \theta - \frac{2}{3} \leq y \leq \theta + \frac{1}{3} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\theta \in \mathbb{R}$ rappresenta un parametro incognito. Sia $\boldsymbol{y}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\boldsymbol{y}}^{\theta}(y)$, e sia y l'osservazione disponibile di $\boldsymbol{y}$.

a) Scrivere l'espressione della funzione di verosimiglianza $L(\theta|y)$

b) Calcolare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ.