Corso di STATISTICA MATEMATICA
Esonero finale - 25.6.2004

Candidato:..

Esercizio 1. In un'urna sono contenute dieci palline: su sei di queste è stampato il numero 1, su tre il numero 2 e su una il numero 4. Si consideri la variabile aleatoria discreta $\boldsymbol{x}$ corrispondente al numero ottenuto dall'estrazione casuale di una pallina.

a) Determinare la funzione di densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x_i)$ e tracciarne il grafico.

b) Determinare la funzione di distribuzione di probabilità $F_{\boldsymbol{x}}(x)$ e tracciarne il grafico.

c) Determinare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ e la varianza $\sigma_{\boldsymbol{x}}^2$ di una singola estrazione.

d) Ripetere i punti *a*) e *b*) relativamente alla variabile aleatoria $\boldsymbol{z}$, corrispondente alla somma dei risultati di due estrazioni senza rimpiazzo.

e) Supponendo che l'estrazione di due palline abbia dato come esito $\boldsymbol{z} = 6$, determinare la probabilità p che l'estrazione di una terza pallina dia esito pari a 2.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha^2}(x-\alpha) & \text{se } 0 \le x < \alpha \\ -\frac{1}{\alpha^2}(x-2\alpha) & \text{se } \alpha \le x < 2\alpha \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Mostrare che per ogni $\alpha > 0$, $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ rappresenta una funzione di densità di probabilità.

b) Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x)$. Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ e la varianza $\sigma_{\boldsymbol{x}}^2$ di $\boldsymbol{x}$, nel caso in cui $\alpha = 2$.

Esercizio 3. Sia θ una grandezza incognita, relativamente alla quale sono disponibili tre diverse misure:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \theta + \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 &= 3\theta + \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 &= 2\theta + \boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2$, sono variabili aleatorie gaussiane, a media nulla e varianza $\sigma_i = 2$, mentre $\boldsymbol{e}_3$ è una variabile aleatoria uniformente distribuita nell'intervallo $[-1,\ 1]$. Si supponga che i rumori di misura $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, siano tra di loro indipendenti.

a) Stabilire quale dei seguenti stimatori è corretto oppure polarizzato:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3}{3}; \quad \hat{\theta}_2 = \boldsymbol{y}_2 - 3\boldsymbol{y}_1; \quad \hat{\theta}_3 = \frac{\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3}{9}; \quad \hat{\theta}_4 = \frac{\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3}{6}$$

b) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, e stabilire se è polarizzata.

c) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, e stabilire se è polarizzata.

d) Calcolare la varianza degli errori di stima $E[(\theta - \hat{\theta})^2]$, per le stime calcolate ai punti *b*) e *c*).

Esercizio 4. Si consideri per $\theta > 0$ la funzione definita da

$$f_{\boldsymbol{y}}^{\theta}(y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\theta} \sin\left(\frac{\pi}{2\theta} y\right) & \text{se } 0 \leq y \leq \theta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

il cui andamento è riportato in Figura 1.

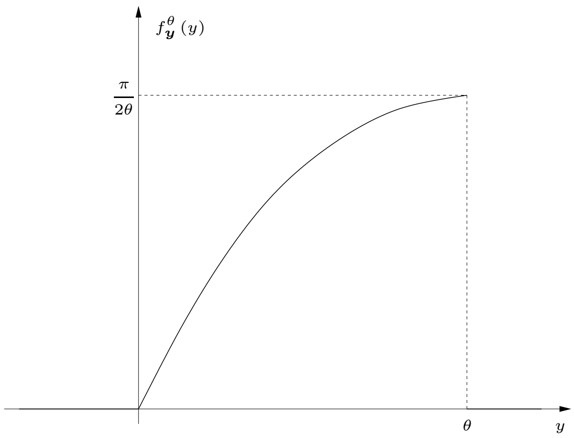

Figura 1: Densità di probabilità sinusoidale.

a) Verificare che per ogni $\theta > 0$, $f_{\boldsymbol{y}}^{\theta}(y)$ è una densità di probabilità.

b) Sia $\boldsymbol{y}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\boldsymbol{y}}^{\theta}(y)$, e sia y l'osservazione disponibile di $\boldsymbol{y}$. Scrivere l'espressione della funzione di verosimiglianza $L(\theta|y)$ e calcolare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ.