# NOTE CONCLUSIVE SULLA PRIMA PARTE DEL CORSO

## 1. RISPOSTA LIBERA DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI E AUTOVETTORI

$x(k+1) = Ax(k)$ tempo discreto

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ tempo continuo

Consideriamo una condizione iniziale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ che sia un autovettore di A relativo a un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ di A $\Rightarrow$ $Ax_0 = \lambda x_0$

Sappiamo che, a tempo discreto, la risposta libera nello stato è data da:

$$x_\ell(k) = A^k x_0$$

Osservando che:

$$A^k x_0 = A^{k-1} \cdot A x_0 = A^{k-1} \cdot \lambda x_0 = \lambda \cdot A^{k-1} x_0 = \dots = \lambda^k x_0$$

risulta $\boxed{x_\ell(k) = \lambda^k x_0}$

A tempo continuo, invece, la risposta libera nello stato è data da:

$$x_\ell(t) = e^{At} x_0$$

Osservando che:

$$e^{At} x_0 = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \right) x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x_0 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(vedi sopra)}}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda^k x_0 = \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right)}_{= e^{\lambda t}} x_0 = e^{\lambda t} x_0$$

risulta $\boxed{x_\ell(t) = e^{\lambda t} x_0}$

# 2. ANALISI MODALE E STABILITÀ

- Tutti i modi di un sistema lineare stazionario asintoticamente stabile sono convergenti

- Un sistema lineare stazionario stabile, ma non asintoticamente stabile, ha almeno un modo limitato e non convergente

Tempo continuo

Infatti, se il sistema è stabile, ma non asintoticamente stabile, esso possiede almeno un $\lambda_j$ con $Re(\lambda_j)=0$, e $\forall \lambda_j : Re(\lambda_j)=0$ risulta $\mu_j = \nu_j$.
Quindi, per i $\lambda_j$ con $Re(\lambda_j)=0$ la dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a $\lambda_j$ è $\ell=1$, e il modo/i modi corrispondente/i a $\lambda_j$ è/sono:

- $1$ se $\lambda_j=0$
- $\sin(\omega_j t)$, $\cos(\omega_j t)$ se $\lambda_j = i\omega_j$ con $\omega_j>0$

Tali modi sono tutti limitati, ma non convergenti.

tempo discreto

Infatti, se il sistema è stabile, ma non asintoticamente stabile, esso possiede almeno un $\lambda_j$ con $|\lambda_j|=1$, e $\forall \lambda_j : |\lambda_j|=1$ risulta $\mu_j = \nu_j$.
Quindi, per i $\lambda_j$ con $|\lambda_j|=1$ la dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a $\lambda_j$ è $\ell=1$, e il modo/i modi corrispondente/i a $\lambda_j$ è/sono

- $1$ o $(-1)^k$ se $\lambda_j=1$ o $\lambda_j=-1$, rispettivamente
- $\sin(k\theta_j)$, $\cos(k\theta_j)$ se $\lambda_j = e^{i\theta_j}$ con $0<\theta_j<\pi$

Tali modi sono tutti limitati, ma non convergenti.

- Un sistema lineare stazionario instabile ha almeno un modo divergente