Lezione 16/12/10

Risposte forzate ad ingressi tipici

- Risposta impulsiva

- Sistemi LTI TC SISO descritti da $\Sigma(A, B, C, D)$
- Risposta forzata ad un impulso al tempo ϕ:

$$y(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\delta(\tau)d\tau + D\delta(t) =$$

$$= Ce^{At}B + D\delta(t)$$

ovvero, $\mathcal{L}$-trasformando

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- la risposta all'impulso corrisponde alla funzione di trasferimento. In altri termini, se conosco la risposta impulsiva di un sistema, ne posso ricavare la f.d.t. e quindi successivamente la risposta forzata ad un qualsiasi segnale d'ingresso

- Analogamente

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{(t-\tau-1)}B\delta(\tau) + D\delta(t) = CA^{t-1}B$$

→ Z-trasformando

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

→ Risposta al gradino

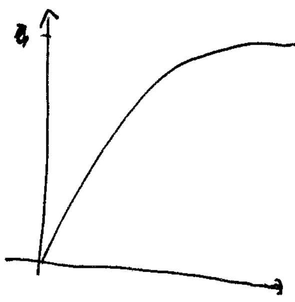
- Comportamento a regime ed iniziale

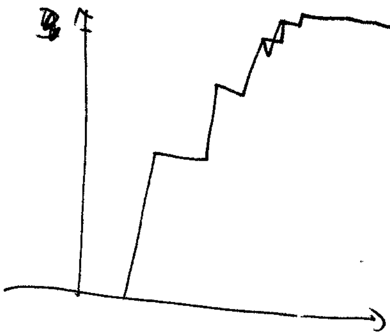
$$TC : y(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,G(s)\,\frac{1}{s}$$

$$TD : y(\infty) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z}\,G(z)\,\frac{z}{z-1}$$

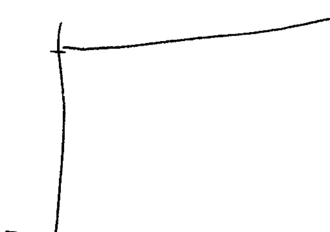
Se il sistema TC è asintoticamente stabile $y(\infty) = G(0)$.
Se il sistema ha un polo nell'origine si ottiene $y(\infty) = \infty$.

→ Sistemi tipo "0"





→ Sistemi tipo '1'



→ Sistemi tipo '2'

Per il comportamento al tempo iniziale

$$y(0) = \lim_{s \to \infty} s\, G(s) \frac{1}{s}$$

$$y(0) = \lim_{z \to \infty} \frac{z-1}{z} G(z) \frac{z}{z-1}$$

→ Dipende da $\partial D - \partial N$ (ECCESSO POLI-ZERI)

FC proprio,

$$y(0) = \lim_{s \to \infty} s G(s) \frac{1}{s} = G(\infty) \qquad 0 < G(\infty) < \infty$$

FC strettamente proprio,

$$y(0) = y^{(1)}(0) = \dots = y^{(n-m-1)}(0) = 0$$

→ la prima derivata non nulla e' la $(n-m)$-esima

→ Analogamente in TD avro' che il primo campione non nullo e' l'$(n-m)$-esimo

→ Esempi di risposte con diversi eccessi poli-zeri

Sistemi del primo ordine

$$G(s) = \frac{\mu}{1+\tau s}$$

- τ ha le dimensioni di un tempo e caratterizza il comportamento dinamico del sistema

- Risposta

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+\tau s}\right\} = \mu\left(1-e^{-t/\tau}\right), \quad t \geq 0$$

- E' veloce verificare che

$$y(0) = 0$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = \mu/\tau \quad \text{se il sistema è asintoticamente stabile}$$

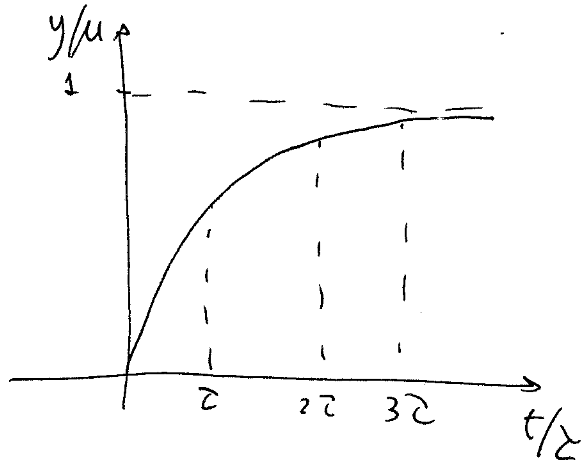
$$y_\infty = \mu$$

$$y(\tau) \simeq 0.63\, y_\infty$$

$$y(2\tau) \simeq 86.5\, y_\infty$$

$$y(3\tau) \simeq 0.95\, y_\infty$$

$$\vdots$$



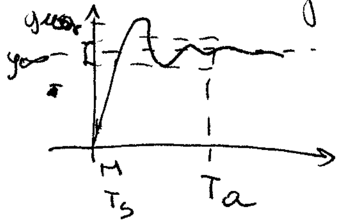
DEF) Si definisce <u>Tempo di assestamento</u> (T_a) il tempo necessario affinché l'uscita rimanga entro il ±5% del valore finale

Per i sistemi del primo ordine $T_a = 3\tau$

CARATTERISTICHE DELLA RISPOSTA AL GRADINO

DEF)

- Valore di regime y_∞ : valore dell'uscita a transitorio esaurito
- Valore massimo y_{max} : massimo del valore raggiunto
- Sovraelongazione massima percentuale : $S\% = 100 \dfrac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$
- Tempo di salita T_s : tempo richiesto perche' l'uscita raggiunga per la prima volta dal 10 % al 90 % del suo valore di regime
- Tempo di assestamento T_a



- SISTEMI DEL SECONDO ORDINE

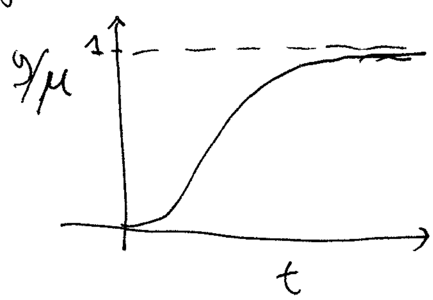
I° CASO) Poli distinti

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}, \quad \tau_1 > \tau_2$$

$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2} e^{-t/\tau_2}\right), \quad t \geq 0$$

- ~~~~ Se τ_1 e τ_2 diminuiscono, aumenta la velocita' di convergenza del sistema
- Si può avere sovraelongazione nulla

ES) $\tau_1 = 2 \quad \tau_2 = 1$



. Se $\tau_1 >> \tau_2$ il sistema si comporta come se fosse del primo ordine

CASO, Poli coincidenti

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+\tau s)^2}$$

$$y(t) = \mu\left(1 - e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau}\right), \quad t \geq 0$$

. Si comportano in modo simile a quelli con poli distinti

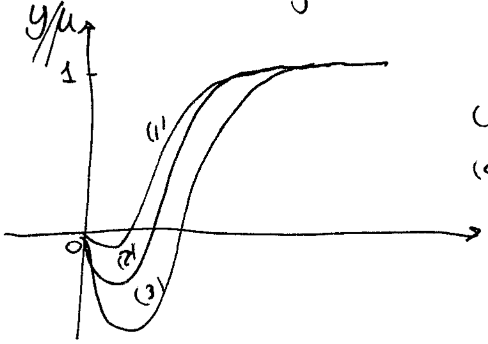
ISTEMI CON POLI REALI E UNO ZERO

$$G(s) = \frac{\mu(1+Ts)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} \qquad \tau_1 \neq T \quad \tau_2 = T$$

$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2}\right), \quad t \geq 0$$

CASO, $T < 0$

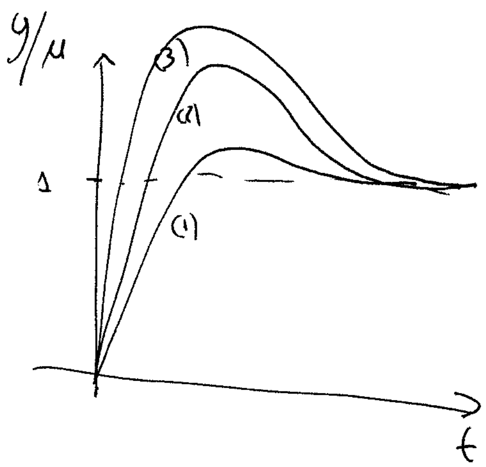
→ Sotto elongazione



(1) $T = -1$
(2) $T = -3$
(3) $T = -5$

. risposta inversa più pronunciata più $-\frac{1}{T}$ si avvicina all'origine

CASO $T > \tau_1 > \tau_2$



(1) $T = 3$
(2) $T = 5$
(3) $T = 7$

III° CASO

$$T \simeq \tau_1 >> \tau_2$$

$$y(t) \simeq \mu(1 - e^{-t/\tau_2})$$

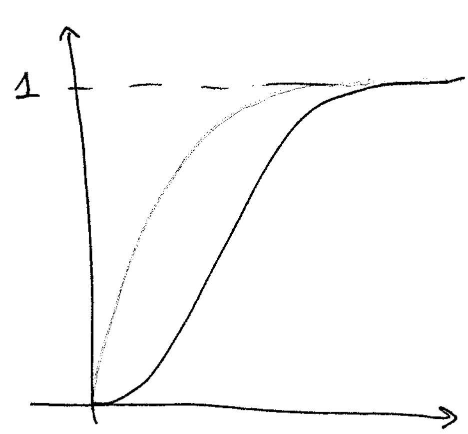
- è come si zero e polo si annullassero!!!

IV° CASO

$$\tau_1 > T > \tau_2$$

- presenza dello zero tende a velocizzare ~~le risposta~~ le risposte rispetto al caso $T = 0$

ES] $\tau_1 = 2$
$\tau_2 = 1$



$\tau = 1.5$
$\tau = 0$

CASO

$\tau_1 > \tau_2 > T > 0$

lo zero si allontana dall'origine influisce sempre meno
lle dinamica del sistema

STEMI CON POLI COMPLESSI CONIUGATI

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

le

$\omega_n > 0$ pulsazione naturale

$|\xi| < 1$ smorzamento

$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n t\sqrt{1-\xi^2} + \arccos(\xi)\right)\right), \quad t \geq 0$$

e $\quad \xi > 0 \quad y_\infty = \mu$

$\xi < 0 \quad$ diverge

$\xi = 0 \quad y(t) = \mu(1 - \cos(\omega_n t)), \ t \geq 0 \quad$ stabile, non asintotic.

siderniamo $\quad 0 < \xi < 1$

$$\frac{y(t)}{t} = 0 \qquad \bar{t}_n = \frac{k\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$k = 1, 2 \ldots$

max = k dispari

min = k pari

erco i punti stazionari

- Valori dell'uscita corrispondenti

$$y(\bar{t}_k) = \mu\left(1-(-1)^k e^{\frac{-\xi k\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right)$$

quindi deriva

$$y_{max} = \mu\left(1+e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

$$S_{\%} = 100\, e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

→ PP 146 IMMAGINE transitorio y/μ in funzione di $\omega_n t$ al variare di ξ

- Poli DOMINANTI (cenni)

- Risposte con MATLAB

SCRIPT MATLAB