Lezione del 10/12/10

Antitrasformata Zeta

Data $F(z)$ e' possibile tornare nel dominio dei campioni applicando

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z)\, z^{k-1}\, dz \qquad k \geq 0, \quad f(k) = 0 \ \forall k < 0$$

→ Funzioni razionali fratte

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad \partial D(z) \geq \partial N(z)$$

- L'idea alla base del metodo e' quella di sviluppare $F(z)$ nella somma di funzioni la cui antitrasformata e' nota e, per la proprieta' di linearita', ottenere l'antitrasformata come somma delle antitrasformate dei singoli addendi.
- Stesso metodo utilizzato per l'antitrasformata di Laplace, ma in TD

$$\mathbb{1}(k) \longrightarrow \frac{z}{z-1} \qquad p(k) \rightarrow \frac{z}{(z-1)^3}$$

$$r(k) \longrightarrow \frac{z}{(z-1)^2} \qquad \vdots$$

- Nelle trasformate di interesse appare una z a numeratore. Allora per far sì che i singoli termini dello sviluppo assumano tale forma, conviene applicare l'anti trasformata alla funzione

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{F(z)}{z}\right] \quad \text{invece che a } F(z)$$

- Richiamo Th Ritardo

$$\hat{f}(k) = f(k-1)$$

$$\mathcal{Z}[\hat{f}(k)] =$$

$$= \mathcal{Z}[f(k-1)] = \frac{1}{z}F(z)$$

- FORMA POLI-ZERI

$$F(z) = \frac{N(z)}{zD(z)} \longrightarrow zD(z) = \prod_{i=0}^{\mu}(z-p_i),$$

$p_h \neq p_j$ per $h \neq j$ poli distinti

$p_i \in \mathbb{C}$ e $p_0 = 0$

- Fratti semplici

$$\frac{N(z)}{\prod_{i=0}^{\mu}(z-p_i)} = \sum_{i=0}^{\mu}\frac{R_i}{z-p_i}$$

o per $(z-p_i)$ si ottiene ②

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{N(z)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (z-p_j)} = (z-p_i)\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{R_j}{(z-p_j)} + R_i$$

$p_i) \frac{F(z)}{z}$ $\qquad R_i$ residui di $\frac{F(z)}{z}$ in p_i

onsiderando $\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = 0 \quad \forall k<0$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{R_i}{z-p_i}$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[R_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i z}{z-p_i}\right] =$$

$$\delta(k) + \left[\sum_{i=1}^{n} R_i \, p_i^{\,k}\right] \mathbb{1}(k)$$

ne tive

$$z)] = \left[\sum_{i=1}^{n} R_i \, p_i^{\,k-1}\right] \mathbb{1}_{k-1}$$

Es.

$$F(z) = \frac{z-10}{(z+2)(z+5)}$$

lo scrivo come

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z-10}{z(z+2)(z+5)} = \frac{R_0}{z} + \frac{R_1}{z+2} + \frac{R_2}{z+5}$$

$$R_0 = \lim_{z \to 0} \cancel{z} \frac{z-10}{\cancel{z}(z+2)(z+5)} = -1$$

$$R_1 = \lim_{z \to -2} (z+2) \frac{z-10}{z(z+2)(z+5)} = \frac{-2-10}{-2(-2+5)} = 2$$

$$R_2 = \lim_{z \to -5} \cancel{(z+5)} \frac{z-10}{z(z+2)\cancel{(z+5)}} = \frac{-5-10}{-5(-5+2)} = -1$$

Quindi

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z-10}{(z+2)(z+5)}\right] = -\delta(k) + \left[2(-2)^k - (-5)^k\right] 1\!\!1(k)$$

- Se invece si ponesse

$$\frac{z-10}{(z+2)(z+5)} = \frac{A}{(z+2)} + \frac{B}{(z+5)}$$

$$A = \lim_{z \to -2} (z+2)\, F(z) = -4$$

$$B = \lim_{z \to -5} (z+5)\, F(z) = 5$$

e poi

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[F(z)\right] = \left[-4\,(-2)^{k-1} + 5\,(-5)^{k-1}\right] \mathbb{1}(k-1)$$

- Divisione lunga

- Se non ci interessa ottenere l'antitrasformata in forma chiusa, ma ci accontentiamo di calcolare i valori assunti dalla funzione $f(k)$ nei singoli istanti di tempo, si può applicare il metodo della divisione lunga.

ES)

$$\frac{z-10}{(z+2)(z+5)} = \frac{z-10}{z^2+5z+2z+10} = \frac{z-10}{z^2+7z+10}$$

$z - 10 + 0 \;|\; z^2 + 7z + 10$

$z + 7 + 10z^{-1} \;|\; 1z^{-1}$ - - -

$= \;\; -17 - 10z^{-1}$

$f(0) = 0$

$f(1) = +1$

$f(2) = -17$

$$F(z) = z^{-1} - 17z^{-2} + 109z^{-3} + \dots$$

Es. ① $F(z) = \dfrac{z+1}{z^2-2z+2}$ [Poli complessi]

$$G(z) = \frac{F(z)}{z} = \frac{z+1}{z(z^2-2z+2)} = \frac{z+1}{z[z-(1+j)][z-(1-j)]}$$

$$= \frac{A}{z} + \frac{B}{z-(1+j)} + \frac{\overline{B}}{z-(1-j)}$$

$$A = \left.\frac{z+1}{z^2-2z+2}\right|_{z=0} = \frac{1}{2}$$

$$B = \left.\frac{z+1}{z[z-(1-j)]}\right|_{z=1+j} = \frac{2+j}{(1+j)[1+j-1+j]} =$$

$$= \frac{2+j}{(1+j)2j} = \frac{2+j}{2j-2} = \frac{(2+j)(-2-2j)}{8} = \frac{-(2+j)(1+j)}{4} =$$

$$= -\frac{2+2j+j-1}{4} = -\frac{1+3j}{4}$$

$$\overline{B} = \frac{-1-3j}{4}$$

$$F(z) = A + B\frac{z}{z-(1+j)} + \overline{B}\frac{z}{z-(1-j)}$$

$$(k) = A\delta(k) + B\,(1+j)^k + \bar{B}\,(1-j)^k =$$

$$= \frac{1}{2}\delta(k) \underbrace{- \frac{1+3j}{4}}_{=|B|e^{j\varphi_B}} \underbrace{(1+j)}_{\rho e^{j\theta}}{}^k - \frac{1-3j}{4}(1-j)^k =$$

$$= \frac{1}{2}\delta(k) + |B|e^{j\varphi_B}\rho^k e^{jk\theta} + |B|\,e^{-j\varphi_B}\rho^k e^{-jk\theta} =$$

$$= \frac{1}{2}\delta(k) + 2|B|\rho^k \,\mathrm{Re}\left[e^{j(\varphi_B + k\theta)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\delta(k) + 2|B|\rho^k \cos(k\theta + \varphi_B)$$

$$\begin{cases} \theta = \arg(1+j) = \pi/4 \\ \varphi_B = -\pi/2 - tg^{-1}(1/3) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\delta(k) + \frac{\sqrt{10}}{2}(\sqrt{2})^k \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + k\frac{\pi}{4}\right)$$

Es. ②

POLI MULTIPLI

$$F(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1/2)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z(z+1)(z-1/2)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-1/2} + \frac{D}{(z-1/2)^2}$$

$$A = \left.\frac{1}{(z+1)(z-1/2)^2}\right|_{z=0} = \frac{1}{(-\frac{1}{2})^2} = 4$$

$$B = \left.\frac{1}{z(z-1/2)^2}\right|_{z=-1} = \frac{1}{-1(-3/2)^2} = -\frac{4}{9}$$

$$D = \left.\frac{1}{z(z+1)}\right|_{z=1/2} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}} = 4/3$$

$$C = \frac{d}{dz}\left.\frac{1}{z(z+1)}\right|_{z=1/2} = \left.\frac{-[z+1+z]}{z^2(z+1)^2}\right|_{z=1/2} =$$

$$= \left.\frac{-(2z+1)}{z^2(z+1)^2}\right|_{z=1/2} = -\frac{8}{\frac{9}{4}} = -\frac{32}{9}$$

$$F(z) = 4 - \frac{4}{9}\frac{z}{z+1} - \frac{32}{9}\frac{z}{z-1/2} + \frac{4}{3}\frac{z}{(z-1/2)^2}$$

- TRATTAMENTO DEL POLO DOPPIO

$$\mathcal{Z}\{k\, 1_k\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left\{k\,\lambda^k\,1_k\right\} = \frac{z/\lambda}{\left(z/\lambda - 1\right)^2} = \frac{z/\cancel{\lambda}}{\dfrac{(z-\lambda)^2}{\lambda^{\cancel{2}}}} = \frac{\lambda z}{(z-\lambda)^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{k\,\lambda^{k-1}\,1_k\right\} = \frac{z}{(z-\lambda)^2}$$

$$\Rightarrow f_k = \left[4\,\delta_k - \frac{4}{9}(-1)^k - \frac{32}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{4}{3}\,k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]1_k$$