Lezione del 9/12/10

Antitrasformata di Laplace

- ANTITRASFORMATA DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE
  - le trasformate razionali fratte corrispondono ai segnali d'interesse (tranne segnali con ritardo)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

- Se $n \geq m$ $F(s)$ e' propria
  se $n > m$ $F(s)$ e' strettamente propria

- Calcolando le radici $p_i \in \mathbb{C}$ e $z_j \in \mathbb{C}$ di $N(s)$ e $D(s)$, $F(s)$ puo' essere scritta in forma poli-zeri

$$F(s) = k \frac{(s-z_1) \dots (s-z_m)}{(s-p_1) \dots (s-p_n)} \; ; \; k' = \frac{b_m}{a_n}.$$

z_j e' uno **zero**, p_i e' un **polo**. I poli e gli zeri possono essere radici semplici o multiple di $D(s)$ e $N(s)$.

- **CASO 1a** **$F(s)$ strettamente propria e tutti poli semplici**

$F(s)$ puo' essere decomposta in FRATTI SEMPLICI (sviluppo di Heaviside)

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s-p_i} = \frac{R_1}{s-p_1} + \dots + \frac{R_n}{s-p_n}$$

R_i e' detto **residuo** di $F(s)$ nel polo p_i

$n = 2$, ma generalizzabile

$$F(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 (s-p_1)(s-p_2)} = \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R_2}{s-p_2}$$

...i ottiene un sistema lineare risolubile se $p_1 \neq p_2$

...lcolo del residuo R_k

$$F(s) = \frac{R_1}{s-p_1} + \dots + \frac{R_k}{s-p_k} + \dots + \frac{R_n}{s-p_n}$$

$$(s-p_k) F(s) = R_1 \frac{(s-p_k)}{s-p_1} + \dots + R_k + \frac{R_n (s-p_k)}{s-p_n}$$

$$\Longrightarrow \boxed{R_k = \lim_{s \to p_k} (s-p_k) F(s)}$$

⚠ Se $s \to p_k$ tutti gli zeri si annullano rimane R_k

Antitrasformata: ogni termine e' la T.d.L. di una funzione esponenziale, per cui

$$\boxed{f(t) = \left(R_1 e^{p_1 t} + \dots + R_n e^{p_n t}\right) \mathbb{1}(t)}$$

...s, 2° grado

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2 - 5s + 6} = \frac{s+1}{(s-3)(s-2)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-2}$$

$s^2 - 5s + 6 = 0$

$$s_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$A = \lim_{s \to 3} \frac{s+1}{s-2} = 4$$

$$B = \lim_{s \to 2} \frac{s+1}{s-3} = -3$$

$$f(t) = 4 e^{3t} - 3 e^{2t}$$

ASO 1b Poli complessi e coniugati

p_{k_1} e $p_{k_2} \in \mathbb{C}$ e $p_{k_2} = p_{k_1}^*$ $\begin{cases} p_{k_1} = \sigma + j\omega \\ p_{k_2} = \sigma - j\omega \end{cases}$

$$R_{k_1} = \lim_{s \to \sigma + j\omega} [s - (\sigma + j\omega)] F(s)$$

$$R_{k_2} = \lim_{s \to \sigma - j\omega} [s - (\sigma - j\omega)] F(s) = R_{k_1}^*$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{R_{k_1}}{s - p_{k_1}} + \frac{R_{k_1}^*}{s - p_{k_1}^*} + \ldots$$

Posto $R_{k_1} = \rho e^{j\varphi}$

$$F(s) = \frac{\rho e^{j\varphi}}{s - p_{k_1}} + \frac{\rho e^{-j\varphi}}{s - p_{k_1}^*} + \ldots = \frac{\rho e^{j\varphi}}{s - [\sigma + j\omega]} + \frac{\rho e^{-j\varphi}}{s - [\sigma - j\omega]} + \ldots$$

$$f(t) = \left(\rho e^{j\varphi} e^{(\sigma + j\omega)t} + \rho e^{-j\varphi} e^{(\sigma - j\omega)t} \right) 1(t) + \ldots =$$

$$= 2\rho \cos(\omega t + \varphi) e^{\sigma t} + \ldots$$

CASO 2, Poli multipli

Sia μ_i la molteplicita' del polo p_i

$$F(s) = \frac{N(s)}{a_n (s-p_1)^{\mu_1} (s-p_2)^{\mu_2} \cdots (s-p_\ell)^{\mu_\ell}} , \quad \mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\ell = n$$

allora $F(s)$ ammette la seguente scomposizione

$$F(s) = \sum_{i=1}^{\ell} F_i(s) \quad \text{dove}$$

$$F_i(s) = \frac{R_{i,1}}{s-p_i} + \frac{R_{i,2}}{(s-p_i)^2} + \dots + \frac{R_{i,\mu_i}}{(s-p_i)^{\mu_i}} = \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{R_{i,k}}{(s-p_i)^k}$$

Calcolo dei coefficienti $R_{i,k}$

Scrivo $F(s) = F_i(s) + H_i(s)$ con $H_i(s) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\ell} F_j(s)$

$$(s-p_i)^{\mu_i} F(s) = R_{i,1}(s-p_i)^{\mu_i-1} + R_{i,2}(s-p_i)^{\mu_i-2} + \dots + R_{i,\mu_i-2}(s-p_i)^2 +$$

$$+ R_{i,\mu_i-1}(s-p_i) + \underbrace{R_{i,\mu_i}} + (s-p_i)^{\mu_i} H_i(s) \quad (*)$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{i,\mu_i} = \lim_{s\to p_i} (s-p_i)^{\mu_i} F(s)}$$

- Derivo (*)

$$\frac{d}{ds}\left[(s-p_i)^{\mu_i}F(s)\right] = R_{i,1}(\mu_i-1)(s-p_i)^{\mu_i-2} + \dots + R_{i,\mu_i-2}\cdot 2(s-p_i) +$$

$$+ 0 + \underbrace{\frac{d}{ds}\left[(s-p_i)^{\mu_i}H_i(s)\right]}_{\text{Ha un fattore } (s-p_i) \text{ a comune}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{R_{i,\mu_i-1} = \lim_{s\to p_i}\frac{d}{ds}\left[(s-p_i)^{\mu_i}F(s)\right]}$$

- Derivo ancora

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_i)^{\mu_i}F(s)\right] = R_{i,1}(\mu_i-1)(\mu_i-2)(s-p_i)^{\mu_i-3} +$$

$$+ R_{i,\mu_i-2}\cdot 2 + 0 + \underbrace{\qquad}_{\text{fattore } (s-p_i)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{R_{i,\mu_i-2} = \frac{1}{2}\lim_{s\to p_i}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_i)^{\mu_i}F(s)\right]}$$

→ REGOLA GENERALE

$$R_{i,\mu_i-k} = \frac{1}{k!}\lim_{s\to p_i}\frac{d^k}{ds^k}\left[(s-p_i)^{\mu_i}F(s)\right]$$

$$k = 0, \dots, \mu_i - 1$$

Es.

$$F(s) = \frac{s-6}{s^2(s+3)} = \frac{R_{1,1}}{s} + \frac{R_{1,2}}{s^2} + \frac{R_2}{(s+3)}$$

$$R_2 = \lim_{s\to -3} (s+3)F(s) = \lim_{s\to -3} \frac{s-6}{s^2} = -1$$

$$R_{1,2} = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2} \frac{s-6}{\cancel{s^2}(s+3)} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$R_{1,1} = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left[s^2 F(s)\right] = \lim_{s\to 0} \frac{s-6}{s+3} = \lim_{s\to 0} \frac{9}{(s+3)^2} = 1$$

Antitrasformata

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\ell} f_i(t) \quad \text{dove} \quad f_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_i(s)]$$

e risulta

$$f_i(t) = \left[R_{i,1} e^{p_i t} + R_{i,2} t e^{p_i t} + R_{i,3} \frac{t^2}{2} e^{p_i t} + \dots + R_{i,\mu_i} \frac{t^{\mu_i - 1}}{(\mu_i - 1)!} e^{p_i t}\right]$$

infatti

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-p)^k}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\Big|_{s=s-p}\right] = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{pt} \, \mathbb{1}(t)$$

Quindi nell'esempio

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+3}$$

$$f(t) = (1 - 2t - e^{-3t}) \, \mathbb{1}(t)$$

CASO 3, F(s) non strettamente propria (4)

$$F(s) = \frac{b_n s^n + \_\_ + b_0}{a_n s^n + \_\_ + a_0}$$

Divido il polinomio a numeratore per il denominatore

$$F(s) = \frac{b_n}{a_n} + \tilde{F}(s) \quad \text{dove} \quad \tilde{F}(s) = \frac{\tilde{b}_{n-1} s^{n-1} + \_\_ + \tilde{b}_0}{a_n s^n + \_\_ + a_0}$$

Allora

$$L^{-1}[F(s)] = \frac{b_n}{a_n}\delta(t) + L^{-1}[\underbrace{\tilde{F}(s)}_{\text{strettamente propria}}]$$

ES.

$$F(s) = \frac{s^2+5s+3}{2s^2+6s+4}$$

$$\begin{array}{l|l} s^2+5s+3 & 2s^2+6s+4 \\ \hline s^2+3s+2 & 1/2 \\ // \quad 2s+1 & \end{array}$$

$$F(s) = \frac{1}{2} + \frac{2s+1}{2s^2+6s+4}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + L^{-1}\left[\frac{2s+1}{2s^2+6s+4}\right] = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{2}\left(-e^{-t} + 3e^{-2t}\right)1(t)$$

Es 1 $$F(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3s+7}{(s+1)(s-3)} =$$

$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} = -\frac{1}{s+1} + \frac{4}{s-3}$$

$$A = \lim_{s \to -1} (s+1)F(s) = \frac{3s+7}{s-3} = -1$$

$$B = \lim_{s \to 3} (s-3)F(s) = \frac{3s+7}{s+1} = 4$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s-3}\right] =$$

$$= -1e^{-t} + 4e^{3t}$$

Es 2 $$F(s) = \frac{s+18}{s(s+3)^2}$$

$$\frac{s+18}{s(s+3)^2} = \frac{P_{1,1}}{s} + \frac{P_{2,1}}{s+3} + \frac{P_{2,2}}{(s+3)^2}$$

$$P_{1,1} = \lim_{s \to 0} sF(s) = \left.\frac{s+18}{(s+3)^2}\right|_{s=0} = 2$$

⑤

$$P_{2,1} = \frac{d}{ds} \left. (s+3)^2 F(s) \right|_{s=-3} = -2$$

$$P_{2,2} = \left. (s+3)^2 F(s) \right|_{s=-3} = -5$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+18}{s(s+3)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{2}{s+3} - \frac{5}{(s+3)^2}\right] =$$

$$= \left(2 - 2e^{-3t} - 5te^{-3t}\right) 1(t)$$

Es ③

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2} =$$

$$= \frac{As(s+1)(s+2) + B(s+1)(s+2) + Cs^2(s+2) + Ds^2(s+1)}{s^2(s+1)(s+2)} =$$

$\Rightarrow$ Moltiplicando l'equazione per s^2 e ponendo $s=0$ si ottiene $B = 1/2$, moltiplicando per $(s+1)$ e ponendo $s=-1$ si ottiene $C=1$ ed infine moltiplicando per $(s+2)$ e ponendo $s=-2$ si ottiene $D = 1/4$.

$$g(s) = \frac{A}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+2}$$

Ponendo inoltre $s=1$ si ha $\frac{1}{6} = A + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}$ e quindi

$A = -\frac{3}{4}$

In conclusione

$$\mathcal{L}^{-1}[g] = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} t + e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-2t}$$

→ **Esistenza del Valore Finale**

Scopo: capire da $F(s)$ se esiste o no $\lim_{t \to \infty} f(t)$.

Se $F(s)$ e' razionale fratta, ogni termine dello sviluppo in fratti semplici ha un'antitrasformata del tipo

a) $R t^h e^{pt} 1(t)$ dove p e' il polo

oppure

b) $M t^h e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) 1(t)$ dove $\sigma = Re[p]$

→ Se $p < 0$ (a) oppure $\sigma < 0$ (b) il limite fa zero

→ Se $p = 0$ (a) il limite e' finito e pari a R solo se $h = 0$ (p e' un polo semplice in $s = 0$)

(b) se $\sigma = 0$ il termine e' un coseno e non ha limite

$\Downarrow$

Il limite esiste se e solo se tutti i poli di $F(s)$ hanno parte reale < 0 escluso al più un polo semplice in $s = 0$