

Lezione del 25/11/10

①

3) Moltiplicazione per esponente - Richiamo sulla definizione

$$Z[\lambda^k f(k)] = F\left(\frac{z}{\lambda}\right)$$

Es Trasformata dell'esponentiale discreto

$$Z\left\{\lambda^k 1(k)\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \bigg|_{z=z/\lambda} = \frac{1}{1-\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{-1}} = \frac{z}{z-\lambda}$$

4) Anticipo Temporale

Dato $\hat{f}(k) = f(k+1)$ ← funzione traslata
inoltre di un passo

$$\begin{aligned} Z[\hat{f}(k)] &= Z[f(k+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1} z^{-k} = \\ &= z \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1} z^{-(k+1)} = z[f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots] = z[F(z) - f(0)] \end{aligned}$$

⚠ Se si considera $f(0)=0$, moltiplicare per z nel dominio trasformato, equivale ad anticipare di un passo nel dominio del tempo, cioè z si può interpretare come operatore di anticipo unitario.

b) Derivazione complessa (Moltiplicazione per k)

$$z[-k f_u] = z \frac{d}{dz} F(z)$$

Es. 1) Trasformata delle rampa

$$\mathcal{L}[k u] = -z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z-1} \right] = -z \frac{z-1-1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

2) Trasformata della parabola

. Si osserva che $p(k) = \frac{1}{2} [k r(k) - r(k)]$ e che

$$\mathcal{L}[k r_u(k)] = -z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(z-1)^2} \right] = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

Allora si trova

$$\mathcal{L}[p(k)] = \frac{z}{(z-1)^3}$$

Th. Valore Iniziale

Se esiste il limite,

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

III Valore finale

(2)

Se esistono i due limiti, ^{pure} f ha trasformata razionale F con poli in $z=1$ o $|z|<1$, allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z)$$

IV Convolutione

Date f_1 e f_2 il prodotto di convoluzione e' dato da

$$\begin{aligned} f_1(k) * f_2(k) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_1(i) f_2(k-i) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f_1(k-l) f_2(l) = \\ &= f_2(k) * f_1(k) \end{aligned}$$

Se $f_1(k) \stackrel{\sim}{=} f_2(k) = 0 \quad \forall k < 0$

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_1(i) f_2(k-i) = \sum_{l=0}^{+\infty} f_1(k-l) f_2(l) = f_2(k) * f_1(k)$$

e si trova $\mathcal{Z} [f_1(k) * f_2(k)] = \bar{F}_1(z) \bar{F}_2(z)$

• Riepilogo principali trasformate $\mathcal{Z}$

$$f(k)$$

$$F(z)$$

$$\delta_k$$

$$1$$

$$11_k$$

$$\frac{z}{z-1}$$

$$k_k$$

$$\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$P_k$$

$$\frac{z}{(z-1)^3}$$

$$\lambda^k 11_k$$

$$\frac{z}{z-\lambda}$$

$$\lambda^k k_k$$

$$\frac{\lambda z}{(z-\lambda)^2}$$

$$\sin(\theta k) 11(k)$$

$$\frac{z \sin(\theta)}{z^2 - 2 \cos(\theta) z + 1}$$

$$\cos(\theta k) 11(k)$$

$$\frac{z [z - \cos \theta]}{z^2 - 2 \cos(\theta) z + 1}$$

• Riepilogo delle principali trasformate di Laplace

$\delta(t)$	1
$\mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
$t(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2(t)$	$\frac{1}{s^3}$
$e^{at} \mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$
$t e^{at} \mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$\sin(\omega t) \mathbb{1}(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t) \mathbb{1}(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$t \sin(\omega t) \mathbb{1}(t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos(\omega t) \mathbb{1}(t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

empic Transformate $z[\sin(\Theta k) \mathbb{1}_k]$

$$z[\sin(\Theta k) \mathbb{1}_k] = z\left[\frac{e^{j\Theta k} - e^{-j\Theta k}}{2j}\right] =$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\underbrace{\frac{z}{z - e^{j\Theta}}}_{\lambda} - \frac{z}{z - e^{-j\Theta}} \right] =$$

$$= \frac{z(-e^{-j\Theta}) - ze^{j\Theta}}{\underbrace{z^2 - ze^{j\Theta} - ze^{-j\Theta} + 1}_{2z \cos \Theta}} = \frac{z \sin \Theta}{z^2 - 2z \cos \Theta + 1}$$

Transformate $z[\cos(\Theta k) \mathbb{1}_k]$

$$z[\cos(\Theta k) \mathbb{1}_k] = z\left[\frac{e^{j\Theta k} + e^{-j\Theta k}}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{z}{z - e^{j\Theta}} + \frac{z}{z - e^{-j\Theta}} \right] = \frac{z^2 - z \cos \Theta}{z^2 - 2z \cos \Theta + 1}$$

• Trasformata $z[p^k \sin \theta_k]$

(4)

Ricordando che $z[\lambda^k f(k)] = F\left(\frac{z}{\lambda}\right)$

$$z[p^k \sin(\theta_k) \mathbb{1}_k] = z[\sin(\theta_k) \mathbb{1}_k]_{z=z/p} =$$

$$= \frac{\frac{z}{p} \sin \theta}{\left(\frac{z}{p}\right)^2 - 2 \frac{z}{p} \cos \theta + 1}$$

• Trasformata $z[p^k \cos \theta_k]$

• Analogamente

$$z[p^k \cos \theta_k \mathbb{1}_k] = z[\cos \theta_k \mathbb{1}_k]_{z=z/p} =$$

$$= \frac{\frac{z}{p} (z/p - \cos \theta)}{\left(\frac{z}{p}\right)^2 - 2 \frac{z}{p} \cos \theta + 1}$$

Esercizi Laplace

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{L}[(e^t + \sin t)^2] &= \mathcal{L}[e^{2t} + 2e^t \sin t + \sin^2 t] = \\ &= \mathcal{L}[e^{2t}] + 2\mathcal{L}[e^t \sin t] + \frac{1}{2} \mathcal{L}[1 - \cos 2t] = \\ &= \frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s-1)^2 + 1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right) = \\ &= \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s^2 - 2s + 2} + \frac{2}{s(s^2 + 4)} \end{aligned}$$

$$\bullet \mathcal{L}[t \sin t] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

• Verificare che

$$\int_0^{2\pi} e^{-st} \sin t \, dt = (1 - e^{-2\pi s}) \mathcal{L}[\sin t]$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-st} \sin t \, dt &= \left[-e^{-st} \cos t \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (-se^{-st}) \cos t \, dt = \\ &= 1 - e^{-2\pi s} + \left[-se^{-st} \sin t \right]_0^{2\pi} + s \int_0^{2\pi} (-se^{-st}) \sin t \, dt = \end{aligned}$$

$$e^{-2\pi s} + 0 - s^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-st} \sin t dt}_I$$

(5)

$$s^2) = 1 - e^{-2\pi s} \quad \text{considerando che } \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}$$

trovare la trasformata $f(s)$ di $f(t) = \begin{cases} (1+t)^2 & 0 \leq t < 1 \\ 1+t^2 & 1 \leq t \end{cases}$

$$\int_0^1 (1+2t+t^2) e^{-st} dt + \int_1^{\infty} (1+t^2) e^{-st} dt =$$

* svolgendo i calcoli $(1+t^2)$ vale anche per $\int_0^{\infty}$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} (1+t^2) dt + \underbrace{\int_0^1 e^{-st} 2t dt}_{\text{per parti}} =$$

$$\left[1+t^2 \right] + \left[-\frac{1}{s} e^{-st} 2t \right]_0^1 + \frac{1}{s} \int_0^1 e^{-st} 2 dt =$$

$$+ \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} 2 \right]_0^1 =$$

$$+ \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s} e^{-s} + \frac{2}{s^2} (1 - e^{-s})$$

proprio converge per $e^{-st} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$ quando $F(s)$ è definito per $s > 0$