

Lezione 24/11/10

①

- Prossima settimana solo compitino: le lezioni verranno recuperate il 15/12/10 dalle 14.00.

Segnali Canonici TC

- Si considerano solo sistemi causali, per i quali è sempre possibile supporre che esista un tempo, convenzionalmente posto a 0, prima del quale entrambi i segnali di ingresso e uscita sono identicamente nulli.

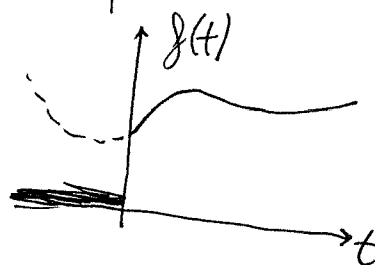
- Gradino unitario (Heaviside)

$$1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Ogni segnale nullo per $t < 0$ può essere visto come

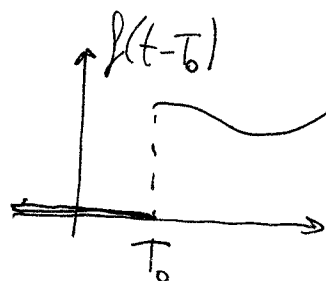
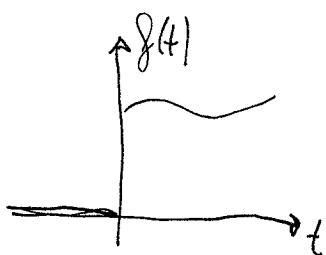
$$\hat{f}(t) = \hat{f}(t) \cdot 1(t)$$

⚠ Si sposta "tutto" il segnale



- Segnale traslato nel tempo

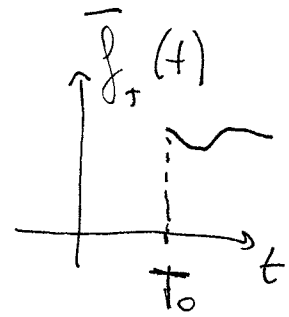
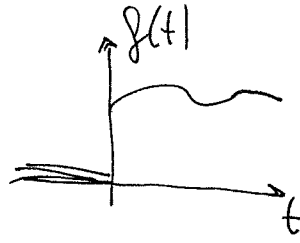
$$f_T(t) = f(t-T) = \hat{f}(t-T) \cdot 1(t-T)$$



- Segnale troncato a T

$$\bar{f}_T(t) = \hat{f}(t) \cdot 1(t-T)$$

⚠ Si comincia da T_0



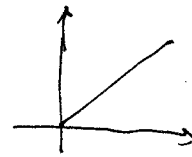
• Segnali canonici d'ordine k

$$r_k(t) = \frac{t^k}{k!} \cdot 1(t)$$

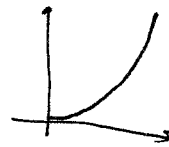
• $k=0 \Rightarrow 1(t)$ Gradino

• $k=1 \Rightarrow$ rampe unitarie

• $k=2 \Rightarrow$ rampe paraboliche



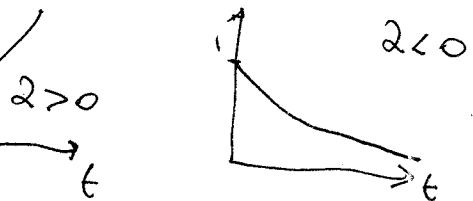
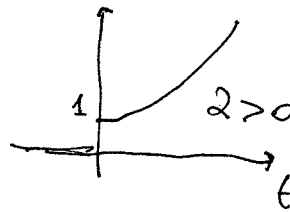
$$r(t) = t$$



$$r(t) = \frac{t^2}{2}$$

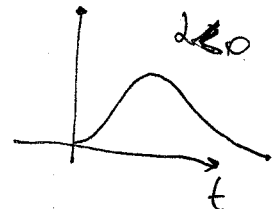
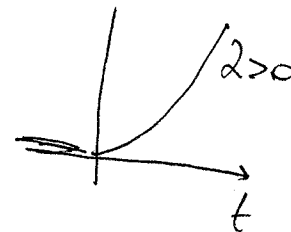
• Segnali esponenziali

$$f(t) = e^{at} \cdot 1(t)$$



• Segnali e rampe esponenziali

$$f(t) = \frac{t^k}{k!} e^{at} \cdot 1(t)$$



• Segnali sinusoidali

$$f(t) = \cos(\omega t) \cdot 1(t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \cdot 1(t)$$

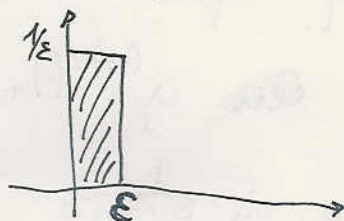
$$f(t) = \sin(\omega t) \cdot 1(t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \cdot 1(t)$$

2) Segnale impulsivo di Dirac $\delta(t)$

- Definito nello spazio delle distribuzioni, non è definibile come funzione reale di variabile reale.

Si definisce allora come limite della funzione

$$S_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



- Facendo tendere $\varepsilon \rightarrow 0$ ho che

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_\varepsilon(t)$$

PROP.

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varepsilon(t) dt = 1 \quad \forall \varepsilon \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

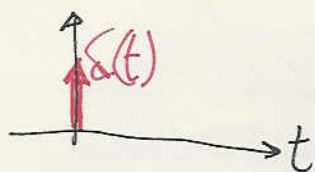
2) Se $f(t)$ è una funzione continua

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) S_\varepsilon(t) dt = \int_0^\varepsilon f(t) S_\varepsilon(t) dt = \int_0^\varepsilon f(t) \cdot \frac{1}{\varepsilon} dt = \frac{1}{\varepsilon} f(\xi) \quad 0 \leq \xi \leq \varepsilon$$

per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha $f(\xi) \rightarrow f(0)$ quindi per estensione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

Si rappresenta così:



Trasformata di Laplace

Sistemi LTI descritti da equazioni differenziali del tipo

a) Eq. ingresso-uscita

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

b) Eq. di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

OBBIETTIVO

Risolvere eq. differenziali con metodi puramente algebrici.
Si introduce un DOMINIO TRASFORMATO in cui ogni segnale $g(t)$ è rappresentato da un segnale trasformato $F(s)$ con una corrispondenza biunivoca

$$u(t) \xrightarrow{\text{trasformata}} U(s)$$

calcolo

$$Y = G(U)$$

Anti-trasformata

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} y(t)$$



Vedremo
in seguito che è G

(3)

DEF Sia $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f(t)=0 \forall t < 0$,

(Se non lo fosse potremmo sempre usare $f(t) = \overline{f(t)} \mathbb{1}(t)$)

limitata cioè $\exists M > 0, \lambda \in \mathbb{R}, t_0 \geq 0$:

$$|f(t)| \leq M e^{\lambda t} \quad \forall t \geq t_0$$

Allora :

$$F(s) = \mathcal{L}[f] : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

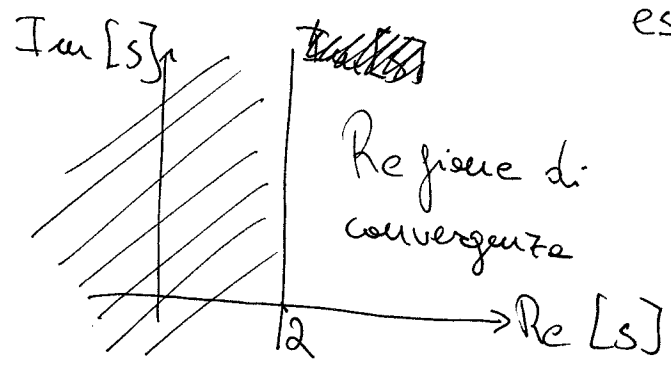


s e' un numero complesso $s = \sigma + j\omega = \text{Re}[s] + j\text{Im}[s]$

Th, $F(s)$ converge per ogni $s : \text{Re}[s] > \lambda$

$$f(t) e^{-st} = f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} \Rightarrow |f(t) e^{-st}| = |f(t)| e^{-\sigma t} \leq M e^{\lambda t} e^{-\sigma t} = M e^{(\lambda - \sigma)t} \quad \forall t \geq t_0$$

Se $\sigma = \text{Re}[s] > \lambda$ ho sempre un esponente negativo quindi converge



- Esempi:
- $1(t)$ $\lambda = 0$
 - $S(t)$ λ qualunque
 - L

• Trasformata dell'impulso

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

definita solo in 0

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta(t)] = 1}$$

• Trasformata del gradino

$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_0^{+\infty} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{+\infty} = \left[\frac{e^{-st}}{-(\sigma + j\omega)} (\cos \omega t - j \sin \omega t) \right] \Big|_0^{+\infty} =$$

$s = \sigma + j\omega$

$$= \frac{0 - 1}{-(\sigma + j\omega)} = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}}$$

Si verifica che $z=0$, ma la funzione $1/s$ è definita $\forall s \neq 0$

Proprietà della trasformata

1) Linearità: $f(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \alpha_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

2) Ritardo: $g(t) = f(t - T) \Rightarrow \mathcal{L}[g(t)] = F(s) e^{-sT}$
dove $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

DIM

④

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g(t)] &= \int_0^{+\infty} f(t-T) e^{-st} dt = \int_{-T}^{+\infty} f(z) e^{-sz} e^{-sT} dz = \\ & \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ t = z+T \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ z+T=0 \text{ in } z \text{ ho } \text{ zero} \\ z = -T \end{array} \\ &= \int_0^{+\infty} f(z) e^{-sz} dz \cdot e^{-sT} = F(s) e^{-sT} \end{aligned}$$

3) Moltiplicazione per esponenziale

$$g(t) = f(t) e^{\gamma t} \Rightarrow \mathcal{L}[g] = F(s-\gamma) \text{ con } F(s) = \mathcal{L}[f]$$

Es, Trasformata della funzione esponenziale

$$\mathcal{L}[e^{\gamma t} 1(t)] = \mathcal{L}[1(t)]_{s=s-\gamma} = \frac{1}{s-\gamma}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}}$$

4) Moltiplicazione per t o derivazione complessa

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{d}{ds} F(s) ; F(s) = \mathcal{L}[f]$$

DIM

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t) (-t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[-t f(t)] \text{ c.v.d.}$$

Trasformata delle derivate

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) ; \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'] &= \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt = \left[f(t) e^{-st} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t) (-s) e^{-st} dt \\ &\quad \uparrow \text{per parti: } f'g = fg' - fg'' \\ &= -f(0) + sF(s) \end{aligned}$$

Però: $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t) e^{-st}| = 0$, essendo $|f(t) e^{-st}| \leq M e^{at} e^{-\sigma t}$ per $t \geq t_0$

e risultare $\sigma > a$ affinché $F(s)$ converga

Trasformata dell'integrale

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \Rightarrow \mathcal{L}[g] = \frac{1}{s} F(s)$$

$$g'(t) = f(t) \Rightarrow \mathcal{L}[f] = s \mathcal{L}[g] - g(0) \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}[g] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f]}$$

Esempi

Trasformate dei segnali canonici $r_k(t) = \frac{t^k}{k!}$

Applico ripetutamente le proprietà dell'integrale, infatti:

$$r_k(t) = \int_0^t r_{k-1}(t) dz$$

quindi:

$$R_k(s) = \frac{1}{s} R_{k-1}(s)$$

Essendo $R_0(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow R_k(s) = \frac{1}{s^{k+1}}$

2) Trasformate delle rampa esponenziale

$$f(t) = \frac{t^k}{k!} e^{\gamma t} u(t)$$

$$L\left[\frac{t^k}{k!} e^{\gamma t} u(t)\right] = L\left[\frac{t^k}{k!} u(t)\right]_{s=s-\gamma} = R_k(s-\gamma) = \frac{1}{(s-\gamma)^{k+1}}$$

↑
ritardo

3) Trasformate delle funzioni sinusoidali:

$$L[\cos(\omega t) u(t)] = L\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} u(t)\right] = \text{Lineare!}$$

$$= \frac{1}{2} \left[L[e^{j\omega t} u(t)] + L[e^{-j\omega t} u(t)] \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{s+j\omega + s-j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

× Esercizio
calcolare $L[\sin(\omega t) u(t)] =$
 $= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

4) Funzione generica

$$f(t) = \int_0^t \tau e^{-\tau} \cos(2\tau) d\tau \quad 1(t)$$

$$\mathcal{L}[\cos(2\tau) 1(\tau)] = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\tau} \cos(2\tau) 1(\tau)] = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}$$

$\nwarrow$ aggiungo il τ toro
 $\nwarrow$ $s \rightarrow s-1$

$$\mathcal{L}[\tau e^{-\tau} \cos(2\tau) 1(\tau)] = -\frac{d}{ds} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}$$

$\uparrow$ prodotto per t

$$\mathcal{L}[f(t)] \stackrel{\text{integrale}}{=} \frac{1}{s} \cdot \left[-\frac{d}{ds} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} \right]$$

h Valore Finale

Se esiste finito $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

Es

$$f(t) = e^{-t} 1(t); F(s) = \frac{1}{s+1} \quad \underline{\text{ma}} \quad f(t) = e^t 1(t); F(s) = \frac{1}{s-1}$$

DEF, Prodotto di convoluzione di due funzioni $f(t), g(t)$ trasformabili. ⑥

$$(f * g) = \int_0^t f(t-z) g(z) dz$$

Th Convolutione

$$\mathcal{L}[f * g] = F(s) G(s)$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f]$$

$$G(s) = \mathcal{L}[g]$$

DIT

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^{\infty} \int_0^t f(t-z) g(z) dz e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t-z) g(z) dz e^{-st} dt \quad \begin{matrix} \swarrow \\ f(t-z) = 0 \quad \forall z > t \end{matrix}$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t-z) g(z) dz e^{-st} dt = \swarrow \begin{matrix} \text{scambio} \\ \text{integrali} \end{matrix}$$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t-z) e^{-st} dt}_{= F(s) e^{-sz}} g(z) dz = F(s) \underbrace{\int_0^{\infty} g(z) e^{-sz} dz}_{G(s)}$$

$$= F(s) G(s)$$

Th Valore iniziale

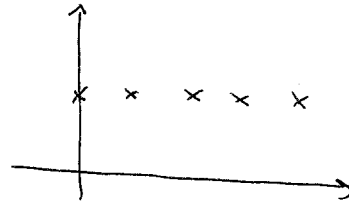
$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Segnali canonici TD

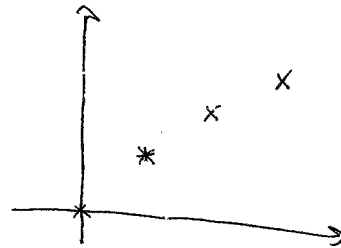
• Gradino discreto

$$1_u = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$



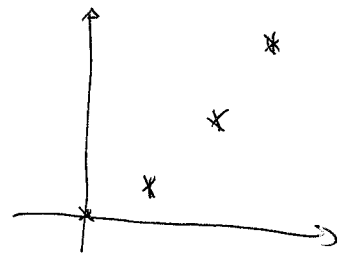
• Ramp discreta

$$r_u = \begin{cases} k, & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$



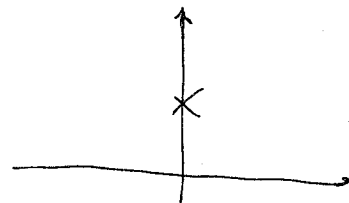
• Parabola discreta

$$p_u = \begin{cases} \frac{k(k-1)}{2} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$



• Impulso discreto

$$\delta_u = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$



Si può facilmente verificare che

$$\sum_{i=-\infty}^{k-1} 1_u(i) = r(k) \quad \sum_{i=-\infty}^{k-1} r_u(i) = p_u(k) \quad \sum_{i=-\infty}^k \delta_u(i) = 1_u(k)$$

Trasformata Zeta

(7)

• Dato una successione $\{f_n\}$ con $f_n = 0 \forall n < 0$

si può associare una funzione complessa $f(z)$ z intero.

• Trasformata Zeta

$$Z[f_n] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C} \quad z = \rho e^{j\theta}$$

• Convergenza

Se $|f_n| \leq M 2^n$ $F(z)$ converge per $|z| > 2$

↑
raggio
di convergenza

Esempi

• Trasformata dell'impulso

$$Z[\delta_n] = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n z^{-n} = 1$$

$$\boxed{Z[\delta_n] = 1}$$

• Trasformata del gradino

$$Z[1_n] = F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

proprietà
della serie
geometrica per $|z| > 1$

Proprietà della trasformata Zeta

Linearità

$$Z[2f_u + \beta g_u] = 2Z[f_u] + \beta Z[g_u]$$

Traslazione (ritardo)

$$Z[f_{u-h}] = z^{-h} Z[f_u]$$

