STUDIO DELLA STABILITÀ DI PUNTI DI EQUILIBRIO

Finora abbiamo dato la definizione di stabilità per i punti di equilibrio di un sistema dinamico. Ci siamo poi soffermati su una particolare classe di sistemi dinamici, i sistemi lineari stazionari, per i quali abbiamo caratterizzato la stabilità dei corrispondenti punti di equilibrio in termini del segno della parte reale (per sistemi a tempo continuo) o del modulo (per sistemi a tempo discreto) degli autovalori della matrice A del sistema.

Ci interessa ora studiare la stabilità dei punti di equilibrio di un generico sistema dinamico ....

Esempio

Consideriamo il sistema dinamico a tempo continuo descritto dall'equazione differenziale

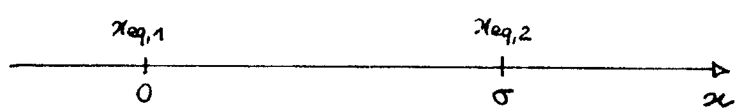
$$\dot{x}(t) = \left(1 - \frac{x(t)}{\sigma}\right) x(t)$$

dove $x(t) \in \mathbb{R}$ è lo stato, e $\sigma > 0$ un parametro.

I punti di equilibrio del sistema si ottengono risolvendo

$$\left(1 - \frac{x}{\sigma}\right) x = 0$$

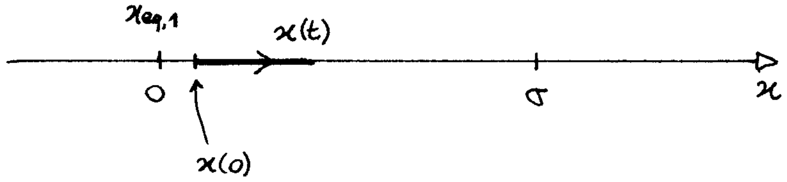
per cui otteniamo $x_{eq,1} = 0$ e $x_{eq,2} = \sigma$.



Per studiare la stabilità di $x_{eq,1}$, osserviamo che, se prendiamo una condizione iniziale $x(0)$ positiva e arbitrariamente vicina a $x_{eq,1}$, risulta $\dot{x}(t) > 0$ per $t \geq 0$, cioè $x(t)$ è crescente, e la traiettoria di $x(t)$ si allontana da $x_{eq,1}$.

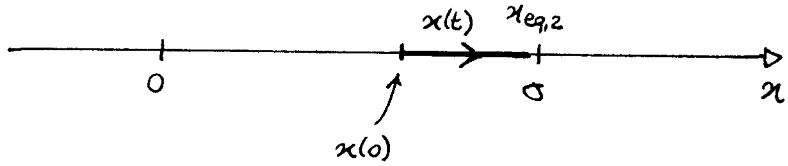
Inoltre, $x(t)$ non "ritorna" asintoticamente verso $x_{eq,1}$.

Dunque, $x_{eq,1}$ è INSTABILE e NON ATTRATTIVO.



Per studiare la stabilità di $x_{eq,2}$, osserviamo invece che:

- se prendiamo una condizione iniziale $x(0)$ a sinistra e arbitrariamente vicina a $x_{eq,2}$, risulta $\dot{x}(t) > 0$ per $t \geq 0$, cioè $x(t)$ è <u>crescente</u>, e la traiettoria di $x(t)$ si avvicina e tende asintoticamente da sinistra verso $x_{eq,2}$.



- se prendiamo una condizione iniziale $x(0)$ a destra e arbitrariamente vicina a $x_{eq,2}$, risulta $\dot{x}(t) < 0$ per $t \geq 0$, cioè $x(t)$ è <u>decrescente</u>, e la traiettoria di $x(t)$ si avvicina e tende asintoticamente da destra verso $x_{eq,2}$.

Dunque, concludiamo che $x_{eq,2}$ è <u>STABILE</u> e <u>ATTRATTIVO</u>, cioè <u>ASINTOTICAMENTE STABILE</u>.

Si osservi che il sistema dinamico considerato ha due punti di equilibrio con diverse proprietà rispetto alla stabilità. Questo può succedere per sistemi nonlineari, ma <u>non</u> per sistemi lineari...

~ ~ ~

L'analisi di stabilità che abbiamo svolto nell'esempio, basata sullo studio del segno della derivata, non è facilmente generalizzabile quando lo stato x del sistema ha dimensione maggiore di 1.

Cerchiamo quindi un metodo più generale per lo studio della stabilità di punti di equilibrio...

LINEARIZZAZIONE E METODO INDIRETTO DI LYAPUNOV

Il metodo che consideriamo si basa sull'idea di approssimare un sistema localmente, vicino a un punto di equilibrio, con il suo sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine nell'intorno di tale punto. Il sistema approssimante che così otteniamo è lineare e stazionario, e di esso sappiamo studiare esattamente la stabilità. Il punto chiave è se le proprietà di stabilità del punto di equilibrio coincidono con quelle del corrispondente sistema linearizzato...

tempo continuo

Consideriamo un sistema dinamico a tempo continuo descritto dall'equazione di stato

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$ è lo stato e $u \in \mathbb{R}^p$ è l'ingresso.

Sia (x_e, u_e) una coppia stato-ingresso di equilibrio, cioè tale che

$$f(x_e, u_e) = 0,$$

e consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor di $f(\cdot)$ nell'intorno di (x_e, u_e), arrestato al primo ordine:

$$f(x,u) \simeq \underbrace{f(x_e, u_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} (x - x_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} (u - u_e)}_{\text{approssima } f(x,u) \text{ localmente in un intorno sufficientemente piccolo di } (x_e,u_e)}$$

NOTA -

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

Sostituendo nell'equazione di stato del sistema, otteniamo

$$\dot{x}(t) \simeq f(x_e, u_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}} \left(x(t)-x_e\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}} \left(u(t)-u_e\right)$$

Ricordando che $f(x_e, u_e)=0$, e ponendo:

- $\tilde{x}(t) = x(t) - x_e$ — variazione dello stato rispetto a x_e —
- $\tilde{u}(t) = u(t) - u_e$ — variazione dell'ingresso rispetto a u_e —
- $A_{lin} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}}$
- $B_{lin} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}}$

da cui segue $\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t)$ (perche' x_e e' costante), abbiamo:

$$\boxed{\dot{\tilde{x}}(t) = A_{lin}\tilde{x}(t) + B_{lin}\tilde{u}(t)}$$

sistema lineare stazionario a tempo continuo (sistema "linearizzato") che descrive il sistema originale per piccole variazioni di x e u nell'intorno di x_e e u_e.

Il metodo indiretto di Lyapunov afferma che:

- se tutti gli autovalori della matrice A_{lin} hanno parte reale negativa (cioe', il sistema linearizzato e' asintoticamente stabile), allora il punto di equilibrio (x_e, u_e) e' asintoticamente stabile.
- se esiste un autovalore della matrice A_{lin} con parte reale positiva (sistema linearizzato instabile), allora il punto di equilibrio (x_e, u_e) e' instabile
- negli altri casi, non si puo' dedurre nulla sulla stabilita' del punto di equilibrio (x_e, u_e).

Esempio

Riprendiamo l'esempio precedente:

$$\dot{x}(t) = \left(1 - \frac{x(t)}{\sigma}\right) x(t)$$

in cui i punti di equilibrio sono $x_{eq,1} = 0$ e $x_{eq,2} = \sigma$.
Essendo $\dot{x}(t) = f(x(t))$ con $f(x) = \left(1 - \frac{x}{\sigma}\right)x$, abbiamo $\frac{df(x)}{dx} = 1 - \frac{2x}{\sigma}$,
e quindi

- $A_{lin,1} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x = x_{eq,1}} = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq,1}$ instabile
- $A_{lin,2} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x = x_{eq,2}} = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq,2}$ asintoticamente stabile

Questi risultati confermano l'analisi qualitativa svolta in precedenza.
Tra l'altro si noti che, quando lo stato del sistema è scalare ($x \in \mathbb{R}$), il metodo indiretto di Lyapunov si riduce a valutare il segno di una derivata... proprio come abbiamo fatto svolgendo l'analisi qualitativa!

tempo discreto

Consideriamo un sistema dinamico a tempo discreto descritto dall'equazione di stato

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$ è lo stato e $u \in \mathbb{R}^p$ è l'ingresso.
Sia (x_e, u_e) una coppia stato-ingresso di equilibrio, cioè tale che

$$f(x_e, u_e) = x_e,$$

e consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor di $f(\cdot)$ nell'intorno di (x_e, u_e), arrestato al primo ordine:

$$f(x,u) \simeq \underbrace{f(x_e,u_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}} (x-x_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}} (u-u_e)}$$

approssima $f(x,u)$ localmente in un intorno sufficientemente piccolo di (x_e,u_e)

Sostituendo nell'equazione di stato del sistema, otteniamo

$$x(k+1) \simeq f(x_e,u_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}} (x(k)-x_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}} (u(k)-u_e)$$

Ricordando che $f(x_e,u_e)=x_e$, e ponendo:

- $\tilde{x}(k) = x(k) - x_e$ — variazione dello stato rispetto a x_e -
- $\tilde{u}(k) = u(k) - u_e$ — variazione dell'ingresso rispetto a u_e -
- $A_{lin} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}}$
- $B_{lin} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}}$

da cui segue $\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - x_e$, abbiamo:

$$\boxed{\tilde{x}(k+1) = A_{lin}\,\tilde{x}(k) + B_{lin}\,\tilde{u}(k)}$$

sistema lineare stazionario a tempo discreto (sistema "linearizzato") che descrive il sistema originale per piccole variazioni di x e u nell'intorno di x_e e u_e.

Il metodo indiretto di Lyapunov afferma che:

- se tutti gli autovalori della matrice A_{lin} hanno modulo minore di 1 (cioè, il sistema linearizzato è asintoticamente stabile), allora il punto di equilibrio (x_e,u_e) è asintoticamente stabile.

- Se esiste un autovalore della matrice A_{lin} con modulo maggiore di 1 (sistema linearizzato instabile), allora il punto di equilibrio (x_e, u_e) è instabile.

- negli altri casi, non si può dedurre nulla sulla stabilità del punto di equilibrio (x_e, u_e).