STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI

Tempo continuo

Consideriamo un sistema lineare stazionario autonomo a tempo continuo, descritto dall'equazione di stato:

$$\boxed{\dot{x}(t) = A\,x(t)} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{con} \quad f(x) = Ax$$

Calcoliamo i punti di equilibrio del sistema:

$$f(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Ax = 0$$

quindi, i punti di equilibrio del sistema sono tutti e soli i punti appartenenti a $\ker(A)$.

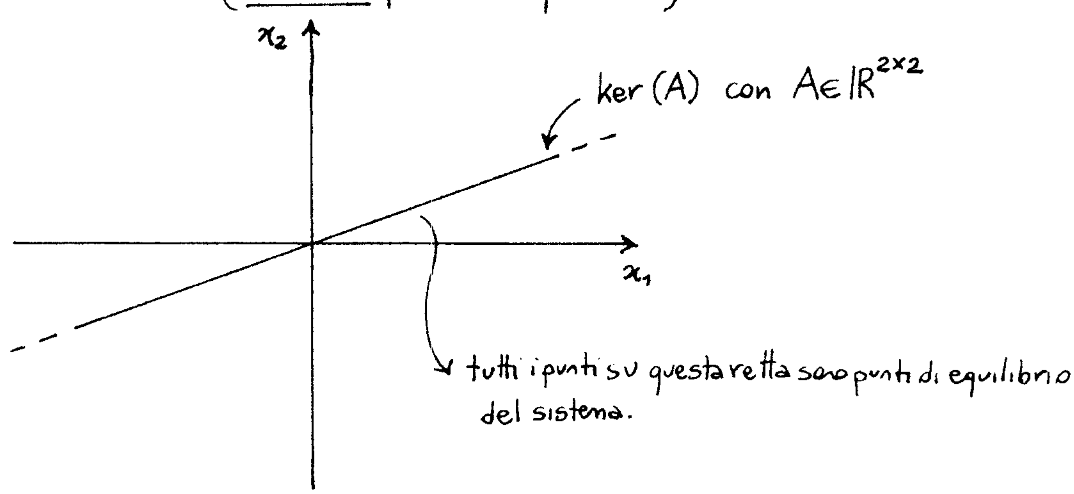
Abbiamo due casi:

1) la matrice A è non singolare

$\Rightarrow$ $x_e = 0$ è l'unico punto di equilibrio del sistema.

2) la matrice A è singolare (equivalentemente, $\lambda = 0$ è autovalore di A)

$\Rightarrow$ $x_e \in \ker(A)$ sono tutti i punti di equilibrio del sistema (infiniti punti di equilibrio)



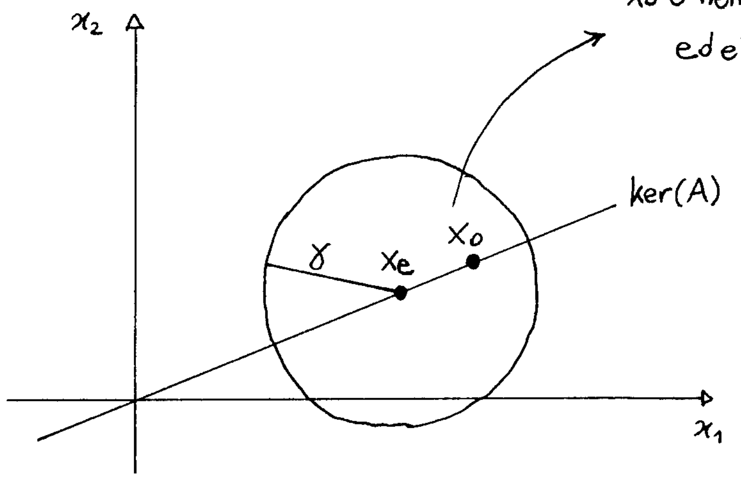
Possiamo dimostrare facilmente le seguenti proprietà:

1) Se A è singolare, nessun punto di equilibrio è attrattivo.

$\Rightarrow$ Se A è singolare, il sistema ha infiniti punti di equilibrio, e in ogni intorno di ciascun punto di equilibrio ne esistono infiniti altri.

Notiamo infatti che, se x_e è punto di equilibrio del sistema, αx_e è ancora punto di equilibrio del sistema per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dunque x_e non può essere attrattivo.



x_0 è nell'intorno di raggio γ di x_e, ed è punto di equilibrio, cioè

$$\varphi(t;x_0) = x_0 \quad \forall t \geq 0$$

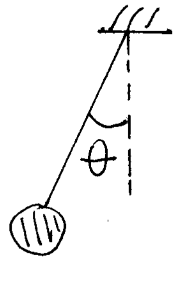
Dunque

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t;x_0) = x_0 \neq x_e.$$

2) Se A è singolare, tutti i punti di equilibrio del sistema godono della stessa proprietà rispetto alla stabilità

cioè, o sono tutti stabili, o sono tutti instabili.

OSSERVAZIONE - Questa proprietà distingue radicalmente i sistemi lineari dai sistemi nonlineari, i quali possono avere punti di equilibrio distinti con diverse caratteristiche rispetto alla stabilità.



Per esempio, il pendolo ha due punti di equilibrio distinti, di cui uno stabile ($\theta = 0$) e uno instabile ($\theta = \pi$).

<u>dimostrazione</u> - Supposta A singolare, consideriamo due punti di equilibrio distinti x_1 e x_2 del sistema, cioè

$$\begin{matrix} Ax_1 = 0 \\ Ax_2 = 0 \end{matrix} \qquad \text{con } x_1 \neq x_2$$

Supponiamo per assurdo che x_1 sia <u>stabile</u> e che x_2 sia <u>instabile</u>.

Notiamo che, per il sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$, la soluzione $\varphi(t;x_0)$ è data da $\varphi(t;x_0) = e^{At}x_0$. Inoltre, essendo x_1 e x_2 punti di equilibrio risulta:

$$\varphi(t;x_1) = x_1 \quad \forall t \geq 0$$
$$\varphi(t;x_2) = x_2 \quad \forall t \geq 0$$

e quindi

$$x_1 = e^{At}x_1 \quad \forall t \geq 0$$
$$x_2 = e^{At}x_2 \quad \forall t \geq 0.$$

Dato che x_2 è instabile,

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x_0 : \|x_0 - x_2\| \leq \delta \text{ e } t^* > 0 : \|\varphi(t^*;x_0) - x_2\| > \varepsilon$$

Prendiamo tale $\varepsilon > 0$, e scegliamo il corrispondente $\delta > 0$ nella definizione di stabilità di x_1, cioè:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|\varphi(t;x_0) - x_1\| \leq \varepsilon \quad \forall x_0 : \|x_0 - x_1\| \leq \delta \text{ e } \forall t \geq 0. \qquad (\triangle)$$

Per l'instabilità di x_2, esistono allora $x_0 : \|x_0 - x_2\| \leq \delta$ e $t^* > 0$ tali che

$$\|\varphi(t^*;x_0) - x_2\| > \varepsilon, \quad \text{cioè} \quad \|e^{At^*}x_0 - x_2\| > \varepsilon.$$

Aggiungiamo e togliamo x_1:

$$\|e^{At^*}x_0 - x_1 + x_1 - x_2\| > \varepsilon$$

e, ricordando che $x_1 = e^{At^*}x_1$ e $x_2 = e^{At^*}x_2$, otteniamo:

$$\|e^{At^*}(x_0 + x_1 - x_2) - x_1\| > \varepsilon.$$

Definiamo $\bar{x}_0 = x_0 + x_1 - x_2$.

Risulta che

$$\|\bar{x}_0 - x_1\| = \|(x_0 + x_1 - x_2) - x_1\| = \|x_0 - x_2\| \le \delta$$

cioè $\bar{x}_0$ appartiene all'intorno di raggio δ di x_1. Inoltre,

$$\|e^{At^*}\bar{x}_0 - x_1\| > \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|\varphi(t^*; \bar{x}_0) - x_1\| > \varepsilon$$

che ci porta a una contraddizione con la stabilità di x_1 in (Δ).

FINE DELLA DIMOSTRAZIONE

3) Se A è non singolare, e l'unico punto di equilibrio $x_e = 0$ è attrattivo, allora si può scegliere $\gamma = +\infty$ nella definizione di attrattività.

cioè, il bacino di attrazione di $x_e = 0$ è tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$.

dimostrazione - Per l'attrattività di $x_e = 0$, risulta che

$$\exists \gamma > 0 : \lim_{t\to\infty} \|\varphi(t; x_0) - x_e\| = 0 \quad \forall x_0 : \|x_0 - x_e\| \le \gamma.$$

e quindi, essendo $\varphi(t; x_0) = e^{At} x_0$ e $x_e = 0$:

$$\exists \gamma > 0 : \lim_{t\to\infty} \|e^{At} x_0\| = 0 \quad \forall x_0 : \|x_0\| \le \gamma.$$

Consideriamo ora x_0 con $\|x_0\| > \gamma$, e definiamo $\bar{x}_0 = \gamma \frac{x_0}{\|x_0\|}$.

Dato che $\|\bar{x}_0\| = \left\|\gamma \frac{x_0}{\|x_0\|}\right\| = \gamma \frac{\|x_0\|}{\|x_0\|} = \gamma$, risulta (per l'attrattività di $x_e = 0$):

$$0 = \lim_{t\to\infty} \|e^{At}\bar{x}_0\| = \lim_{t\to\infty} \left\|e^{At}\gamma \frac{x_0}{\|x_0\|}\right\| = \lim_{t\to\infty} \frac{\gamma}{\|x_0\|} \|e^{At} x_0\|.$$

Essendo $\frac{\gamma}{\|x_0\|}$ una costante, segue che $\lim_{t\to\infty} \|e^{At} x_0\| = 0$.

Dall'arbitrarietà di x_0 segue la tesi.

FINE DELLA DIMOSTRAZIONE

Le proprietà enunciate e dimostrate ci dicono che, per sistemi lineari stazionari, la STABILITÀ non è solo una caratteristica locale dei punti di equilibrio, ma anche una caratteristica globale del sistema.

Dunque, per sistemi lineari stazionari si può parlare di STABILITÀ / STABILITÀ ASINTOTICA / INSTABILITÀ del sistema, non solo dei singoli punti di equilibrio.

Vedremo ora come le caratteristiche di stabilità di un sistema lineare, stazionario a tempo continuo dipendano essenzialmente dal segno della parte reale degli autovalori della matrice A.

Per capire il perché di questa relazione, consideriamo un caso particolare: matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con tutti autovalori reali e distinti

OSSERVAZIONI

- A è diagonalizzabile
- Siccome gli autovalori di A sono tutti reali, coincidono con le rispettive parti reali.

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A, e sia $v_i \in \mathbb{R}^n$, $v_i \neq 0$, un autovettore di A relativo a λ_i, $i=1,\dots,n$.

Definita la matrice non singolare $T = [v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n]$, risulta

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi(t;x_0) = e^{At}x_0 = Te^{\Lambda t}\underbrace{T^{-1}x_0}_{\alpha} = \qquad (*)$$

soluzione di $\dot{x}(t) = Ax(t)$ con condizione iniziale $x(0)=x_0$

$$= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n \qquad (**)$$

NOTA- Ricordando che $\varphi(0;x_0) = x_0$ [al tempo $t=0$ la soluzione coincide con la condizione iniziale!], valutando $(**)$ per $t=0$ otteniamo

$$x_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

cioè, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le coordinate di x_0 rispetto alla base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$.

Consideriamo ora i seguenti sottocasi:

- tutti gli autovalori di A sono negativi, cioè $\lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$

  Risulta, utilizzando $(**)$:

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t;x_0)\| = \lim_{t\to\infty} \|\underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{\to 0}\alpha_1 v_1 + \dots + \underbrace{e^{\lambda_n t}}_{\to 0}\alpha_n v_n\| = 0$$

  per ogni condizione iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

  Dunque $x_e = 0$ è un punto di equilibrio attrattivo.

  Inoltre, fissato $\varepsilon > 0$, e utilizzando $(*)$:

$$\|\varphi(t;x_0)\| = \|Te^{\Lambda t}T^{-1}x_0\| \leq \|T\| \, \|e^{\Lambda t}\| \, \|T^{-1}\| \, \|x_0\| \leq$$

$$\leq c \, \|T\| \, \|T^{-1}\| \, \delta = \varepsilon$$

  $\exists\, c > 0 : \|e^{\Lambda t}\| \leq c \;\; \forall t \geq 0$ in quanto tutte le funzioni in $e^{\Lambda t}$ sono limitate in $[0, \infty)$.

  avendo scelto x_0 (condizione iniziale) tale che $\|x_0\| \leq \delta$ con $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c\,\|T\|\,\|T^{-1}\|}$.

Dunque $x_e = 0$ è un punto di equilibrio stabile.

$\Rightarrow$ Essendo stabile e attrattivo, $x_e = 0$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

- $\lambda_1 = 0$, mentre tutti gli altri autovalori di A sono negativi, cioè $\lambda_i < 0$, $i = 2, \dots, n$

Risulta, utilizzando (**):

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t;x_0)\| = \lim_{t\to\infty} \|\alpha_1 \underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{\substack{\| \\ 1 \\ \text{perché } \lambda_1 = 0}} v_1 + \alpha_2 \underbrace{e^{\lambda_2 t}}_{\downarrow\, 0} v_2 + \dots + \alpha_n \underbrace{e^{\lambda_n t}}_{\downarrow\, 0} v_n\| = \|\alpha_1 v_1\|$$

Dato che $\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t;x_0)\| \neq 0$ se $\alpha_1 \neq 0$ (infatti, $v_1 \neq 0$ perché è un autovettore, e quindi $\alpha_1 v_1 \neq 0$ se $\alpha_1 \neq 0$), il punto di equilibrio $x_e = 0$ non è attrattivo.

ATTENZIONE! Lo sapevamo già.... Se $\lambda = 0$ è autovalore di A, la matrice A è singolare, e gli infiniti punti di equilibrio del sistema (tra cui l'origine...) non sono attrattivi (vedi Proprietà 1).

D'altra parte, fissato $\varepsilon > 0$, e utilizzando (*):

$$\|\varphi(t;x_0)\| = \|T e^{\Lambda t} T^{-1} x_0\| \leq \dots \leq \varepsilon \quad \text{se } \|x_0\| \leq \delta \text{ con } \delta = \frac{\varepsilon}{c\|T\|\|T^{-1}\|}$$

come nel caso precedente...

Dunque, x_e è un punto di equilibrio stabile.

- esiste un autovalore positivo, cioè $\exists \lambda_j > 0$ per qualche $j = 1, \dots, n$.

Scegliendo $x_0 = \delta v_j$ (con $\delta > 0$ e v_j autovettore di A relativo a λ_j con $\|v_j\| = 1$), abbiamo che $\|x_0\| = \delta$ e $\varphi(t;x_0) = e^{At} x_0 = e^{\lambda_j t} x_0$.

Dunque $\|\varphi(t;x_0)\| = \|e^{\lambda_j t} x_0\| = e^{\lambda_j t}\|x_0\| = \delta e^{\lambda_j t} \longrightarrow \infty$ per $t \longrightarrow \infty$

Risultando $\|\varphi(t;x_0)\| > \varepsilon$ definitivamente per $t \to \infty$, x_e è un punto di equilibrio instabile.

Ricapitolando, nel caso di matrice A con tutti autovalori reali e distinti:

- autovalori tutti negativi => sistema <u>asintoticamente stabile</u>
- un autovalore in zero, e gli altri tutti negativi => sistema <u>stabile</u>
- esiste un autovalore positivo => sistema <u>instabile</u>

Cominciamo cioè a capire come le caratteristiche di stabilità di un sistema lineare stazionario a tempo continuo sono legate al segno [della parte reale] degli autovalori della matrice A...

Enunciamo il <u>caso generale</u>:

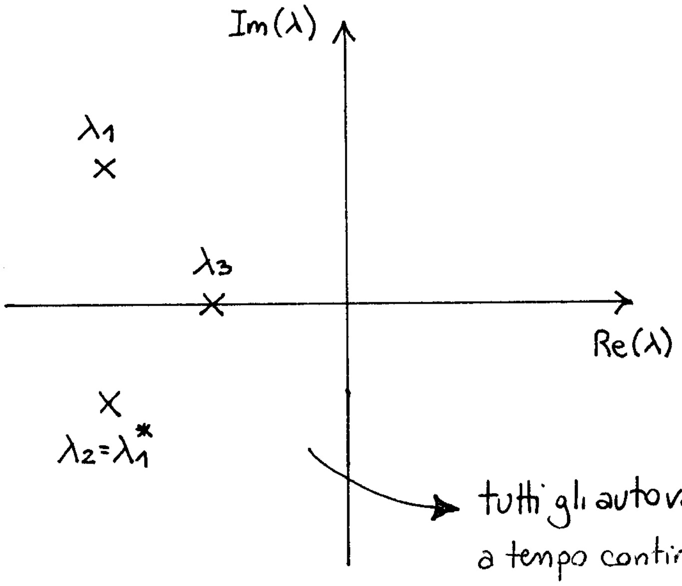
Si consideri il sistema lineare stazionario a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ <u>stato</u>, $u \in \mathbb{R}^p$ <u>ingresso</u>, $y \in \mathbb{R}^q$ <u>uscita</u>

e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ gli autovalori distinti di A (quindi $m \leq n$), con molteplicità algebriche μ_i e geometriche ν_i, $i = 1, \dots, m$. Allora:

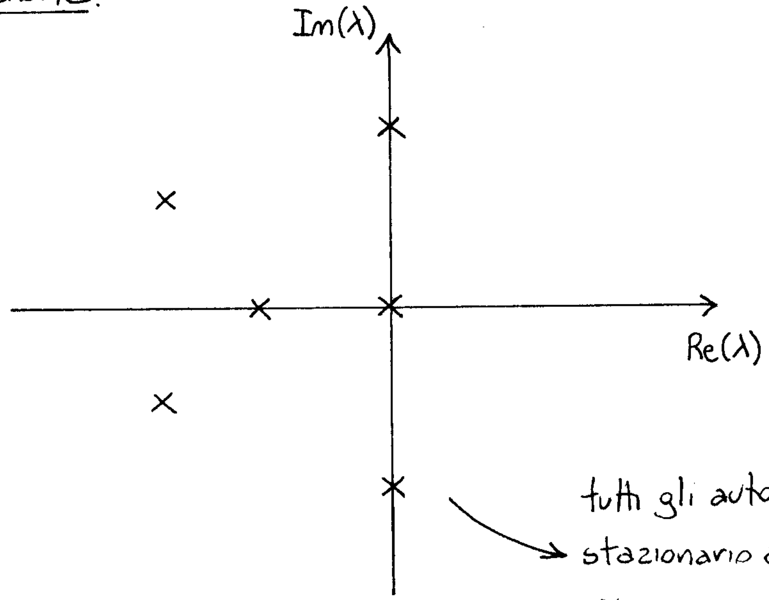
- se $Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i = 1, \dots, m$, il sistema è <u>asintoticamente stabile</u>.



NOTA - $Re(\lambda)$ denota la parte reale di $\lambda \in \mathbb{C}$

tutti gli autovalori di un sistema lineare stazionario a tempo continuo <u>asintoticamente stabile</u> si trovano nel <u>semipiano sinistro aperto</u>.

- se $Re(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i = 1, .., n$, e inoltre risulta $\mu_i = \nu_i$ per i λ_i tali che $Re(\lambda_i) = 0$, allora il sistema è (semplicemente) stabile.

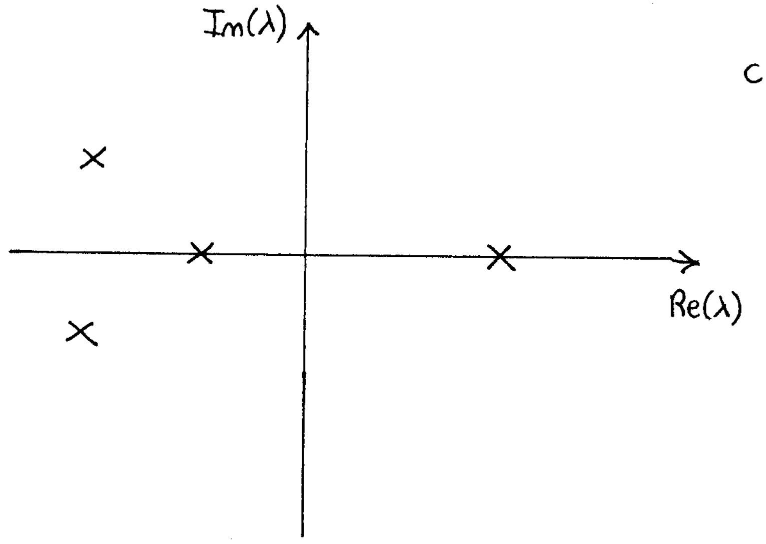


tutti gli autovalori di un sistema lineare stazionario a tempo continuo stabile si trovano nel semipiano sinistro chiuso, ma non basta. Quelli sull'asse immaginario devono anche verificare $\mu_i = \nu_i$.

- altrimenti, il sistema è instabile.

Ciò accade se uno o più autovalori di A hanno parte reale positiva:

cioè si trovano nel semipiano destro aperto



oppure tutti hanno parte reale ≤ 0, ma ne esiste uno o più con parte reale nulla per cui $\nu_i < \mu_i$.

Tempo discreto

Consideriamo un sistema lineare stazionario autonomo a tempo discreto, descritto dall'equazione di stato:

$$\boxed{x(k+1)=Ax(k)} \quad \Rightarrow \quad x(k+1)=f(x(k)) \quad \text{con } f(x)=Ax$$

Calcoliamo i punti di equilibrio del sistema:

$$f(x)=x \quad \Rightarrow \quad Ax=x \quad \Rightarrow \quad (I-A)x=0$$

quindi, i punti di equilibrio del sistema sono tutti e soli i punti appartenenti a $\ker(I-A)$.

Abbiamo due casi:

1) la matrice $I-A$ e' non singolare

$\Rightarrow$ $x_e=0$ e' l'unico punto di equilibrio del sistema.

2) la matrice $I-A$ e' singolare (equivalentemente, $\lambda=1$ e' autovalore di A)

$\Rightarrow$ $x_e \in \ker(I-A)$ sono tutti i punti di equilibrio del sistema (infiniti punti di equilibrio)

Si dimostra che:

1) Se $I-A$ e' singolare, nessun punto di equilibrio e' attrattivo.

2) Se $I-A$ e' singolare, tutti i punti di equilibrio del sistema godono della stessa proprieta' rispetto alla stabilita'.

3) Se $I-A$ e' non singolare, e l'unico punto di equilibrio $x_e=0$ e' attrattivo, allora si puo' scegliere $\gamma=+\infty$ nella definizione di attrattivita'.

Dunque, anche per sistemi lineari stazionari a tempo discreto,

la STABILITÀ è una caratteristica globale del sistema,
e si può parlare di STABILITÀ / STABILITÀ ASINTOTICA / INSTABILITÀ del sistema, non solo dei singoli punti di equilibrio.

Le caratteristiche di stabilità di un sistema lineare, stazionario a tempo discreto dipendono essenzialmente dal modulo degli autovalori della matrice A.

Vale infatti il seguente risultato:

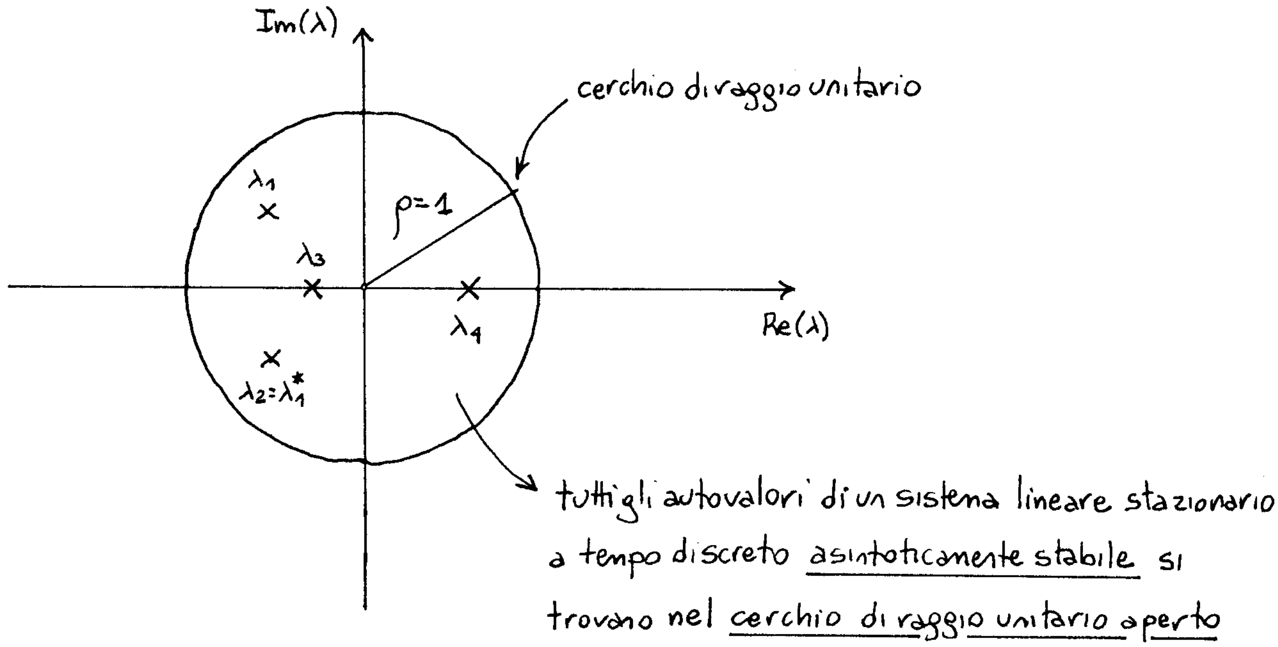
Si consideri il sistema lineare stazionario a tempo discreto:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

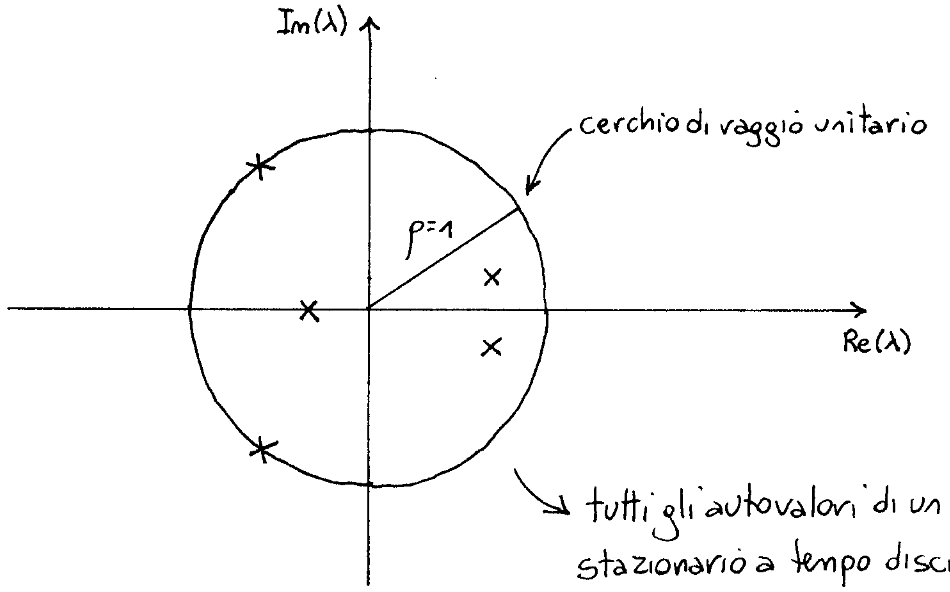
$x \in \mathbb{R}^n$ stato, $u \in \mathbb{R}^p$ ingresso, $y \in \mathbb{R}^q$ uscita

e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gli autovalori distinti di A (quindi $m \leq n$), con molteplicità algebriche μ_i e geometriche ν_i, $i = 1, \ldots, m$. Allora:

- se $|\lambda_i| < 1 \ \forall i = 1, \ldots, m$, il sistema è asintoticamente stabile.



- se $|\lambda_i| \leq 1 \quad \forall i = 1, .., m$, e inoltre risulta $\mu_i = \nu_i$ per i λ_i tali che $|\lambda_i| = 1$, allora il sistema e' (semplicemente) stabile.

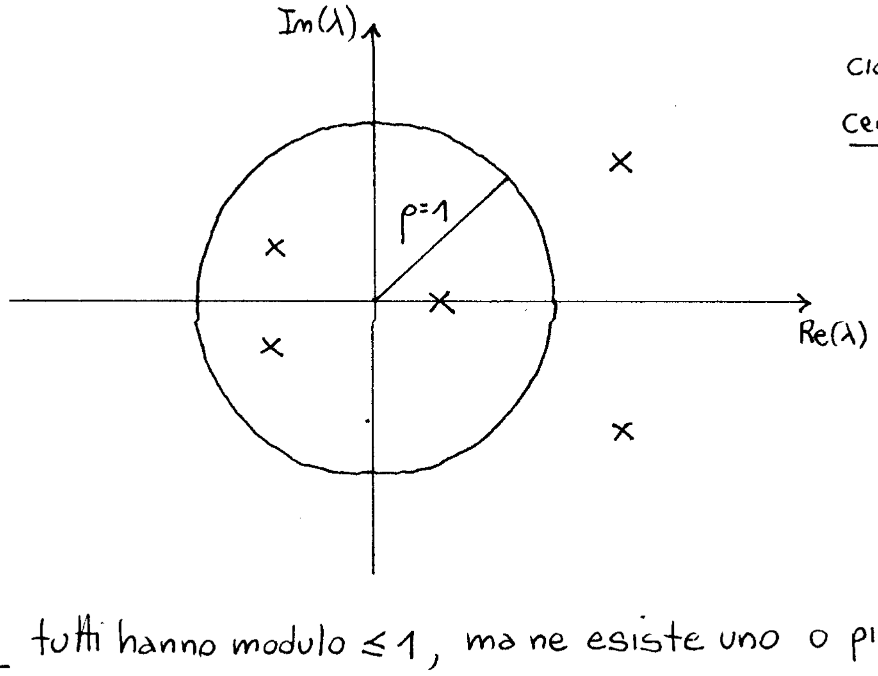


tutti gli autovalori di un sistema lineare stazionario a tempo discreto stabile si trovano nel cerchio di raggio unitario chiuso, ma non basta. Quelli sulla circonferenza di raggio unitario devono anche verificare $\mu_i = \nu_i$.

- altrimenti, il sistema e' instabile.

Cio' accade se uno o piu' autovalori di A hanno modulo maggiore di 1 :

cioe' si trovano fuori del cerchio di raggio unitario chiuso



oppure tutti hanno modulo ≤ 1, ma ne esiste uno o piu' con modulo uguale a 1 per cui $\nu_i < \mu_i$.

SCHEMA RIASSUNTIVO

Stabilità dei sistemi lineari stazionari

	Tempo continuo	Tempo discreto
stabilità asintotica	$Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$	$\lvert\lambda_i\rvert < 1 \quad \forall i$
stabilità (semplice)	$Re(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i$ e $\mu_i = \nu_i$ per i λ_i con $Re(\lambda_i) = 0$	$\lvert\lambda_i\rvert \leq 1 \quad \forall i$ e $\mu_i = \nu_i$ per i λ_i con $\lvert\lambda_i\rvert = 1$
instabilità	• $\exists \lambda_i : Re(\lambda_i) > 0$ oppure • $Re(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i$ e $\exists \lambda_i : Re(\lambda_i) = 0$ e $\nu_i < \mu_i$	• $\exists \lambda_i : \lvert\lambda_i\rvert > 1$ oppure • $\lvert\lambda_i\rvert \leq 1 \quad \forall i$ e $\exists \lambda_i : \lvert\lambda_i\rvert = 1$ e $\nu_i < \mu_i$