

## STABILITA'

Il concetto di stabilità è di uso comune nella vita reale.

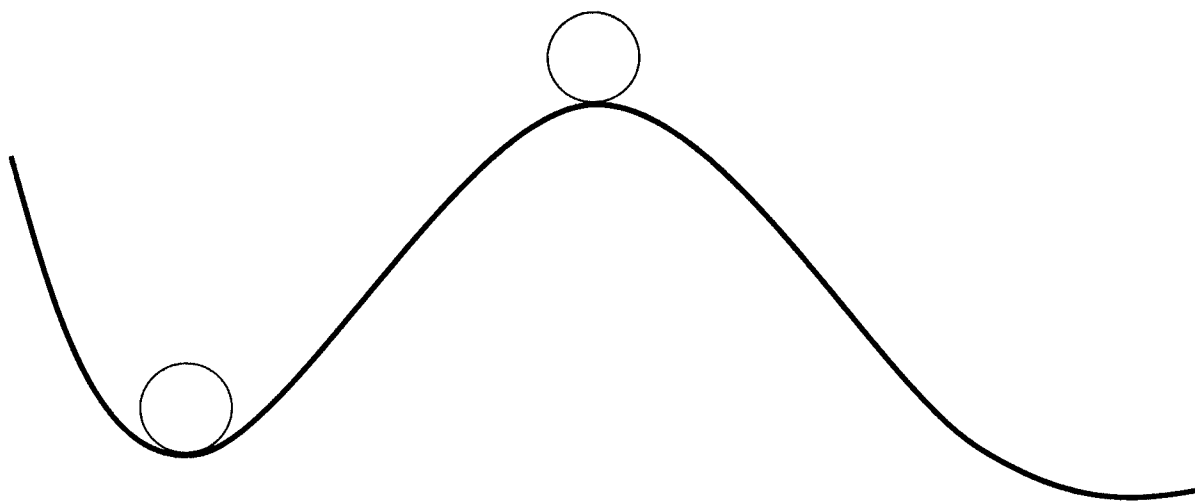
Ecco la definizione che ne dà l'Enciclopedia Treccani....

**stabilità** s. f. [dal lat. *stabilitas* -atis, der. di *stabilis* "stabile"]. – **1.** Il fatto, la condizione e la caratteristica di essere stabile, sia in senso proprio, cioè ben basato ed equilibrato, capace di resistere a forze e sollecitazioni esterne: *s. delle fondamenta di una costruzione*, e *s. di un edificio, di un ponte, di una struttura*; sia in senso estens. e fig., che resiste, si conserva e si mantiene senza subire spostamenti, cambiamenti o modificazioni rilevanti: *s. dei colori, della tinta di un tessuto*; *s. politica, sociale, economica*, e *s. di un governo, di una maggioranza, delle condizioni economiche, dell'ordinamento sociale*; *s. di un accordo, della pace*; *s. di propositi*. **2.** Con accezioni scient. e tecn.: **a.** In fisica, con riferimento allo *stato* (meccanico, termodinamico) di un sistema fisico, si dice che esso è in condizioni di *stabilità* se, dopo una perturbazione esterna, tende spontaneamente a tornare nello stato iniziale: la stabilità caratterizza quindi quegli *stati di equilibrio* ai quali corrisponde un valore minimo dell'energia; in questo senso si parla di *s. dell'equilibrio* e di *grado di s.*, come capacità del sistema di mantenere invariato il suo stato di fronte a perturbazioni di intensità crescente; *s. statica* o *dinamica*, in un sistema materiale, l'attitudine del sistema a mantenersi in una configurazione di equilibrio o, rispettivam., su una determinata traiettoria, nonostante l'azione di cause perturbatrici. **b.** Nell'architettura navale, attitudine di una nave o di un'imbarcazione a riprendere la sua posizione normale di equilibrio quando ne sia scostata a causa delle oscillazioni (rollio o beccheggio) provocate dal moto ondoso; in partic., *s. di rotta*, l'attitudine a mantenere la rotta senza continue correzioni del timone, dipendente dalla forma dello scafo di deriva, dalla lunghezza della chiglia, dalle dimensioni del timone, ecc. Con sign. analoghi il termine e le relative locuzioni sono usati anche in rapporto ad aeromobili (per cui v. anche VOLO). **c.** In chimica, *s. di un sistema, di un composto*, la proprietà di conservarsi invariato, di non subire modificazioni chimiche; *s. di un esplosivo*, la sua resistenza ad alterazioni spontanee. **d.** In meteorologia, *s. delle condizioni atmosferiche* (o, nell'uso com., *del tempo*), *s. della temperatura* o *della pressione*, ecc., la tendenza a perdurare, a non subire rilevanti variazioni per un certo periodo di tempo. **e.** In economia, situazione di condizioni, grandezze, valori economici caratterizzata non da immobilità ma da continue lievi oscillazioni intorno a un determinato livello (detto appunto *equilibrio stabile*): *s. del reddito nazionale, dell'occupazione, del ritmo di sviluppo produttivo*; *s. della moneta* (*s. della lira, del dollaro*, ecc.), *s. dei cambi*; *s. dei prezzi*. **f.** Nel diritto del lavoro, *s. del posto di lavoro* o *dell'impiego* o *dell'occupazione*, il diritto del lavoratore subordinato a conservare il proprio posto per un periodo di tempo predeterminato, previsto dalla legge fino al raggiungimento del limite di età per i dipendenti del pubblico impiego (salvo che per circostanze eccezionali) e, con particolari limitazioni, per i dipendenti di imprese private.

Da questa definizione possiamo osservare che:

- Parlando di stabilità, ci si riferisce tipicamente a una condizione di funzionamento o comportamento (di un ente, dispositivo o persona) che non subisca modificazioni rilevanti a fronte di perturbazioni (limitate).
- Il concetto di stabilità compare sia in contesti tecnici e scientifici (fisica, chimica, meteorologia, tecnologia, ecc.), che sociali (economia, diritto, ecc.).
- Il concetto di stabilità è legato ai concetti di stato e di equilibrio...

Nella teoria dei *sistemi dinamici* il concetto di stabilità descrive il comportamento di un sistema nelle vicinanze di un punto (o *stato*) di *equilibrio*. Intuitivamente, un punto di equilibrio stabile è un punto di funzionamento che non risente delle piccole perturbazioni: se ci si sposta di poco da un punto stabile, il comportamento del sistema continuerà a rimanere anche in futuro nelle vicinanze di quel punto. Per esempio, una palla nel fondo di una valle è in una posizione di equilibrio *stabile*, una palla in cima ad una collina è in una posizione di equilibrio *instabile*.



Il concetto di stabilità può essere esteso alle traiettorie di un sistema dinamico. Per esempio...

**Friday November 7, 1997**

**Baby Benz falls foul of a moose**

**Mercedes is recalling 3,000 brand-new A Class mini cars to correct stability problems revealed in Scandinavian tests.**



La Classe-A ha fallito il "moose test" (test dell'alce) in cui i giornalisti scandinavi sono riusciti a ribaltare il veicolo mentre ne testavano la capacità di "evitare l'alce". La contromisura della Mercedes è stata di inserire un sistema di stabilità elettronica e di controllo della trazione, l' Electronic Stability Program (ESP).

Il sistema di controllo della trazione ESP agisce sui freni e aggiusta l'accelerazione per correggere lo slittamento.

Tempo continuo

Consideriamo un sistema autonomo e stazionario descritto dalle relazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) & \text{(TC.1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 & \text{(TC.2)} \end{cases}$$

dove  $x \in \mathbb{R}^n$  è lo stato,  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme aperto.

Denotiamo la soluzione di (TC.1) - (TC.2) con

$$\varphi(t; x_0)$$

In particolare, dunque:

- per (TC.1):  $\frac{d\varphi(t; x_0)}{dt} = f(\varphi(t; x_0))$

- per (TC.2):  $\varphi(0; x_0) = x_0$

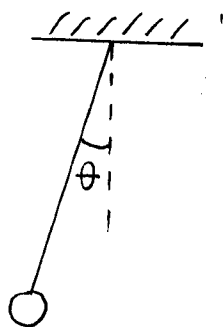
DEFINIZIONE -  $x_e \in \mathcal{X}$  si dice punto di equilibrio per il sistema (TC.1) se

$$\varphi(t; x_e) = x_e \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

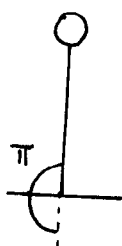
interpretazione: un punto di equilibrio è un valore dello stato in cui la dinamica del sistema si "arresta".

↳ partendo dalla condizione iniziale  $x_e$ , la dinamica rimane bloccata in  $x_e$  per ogni  $t \geq 0$

Esempio - posizioni di equilibrio di un pendolo rigido

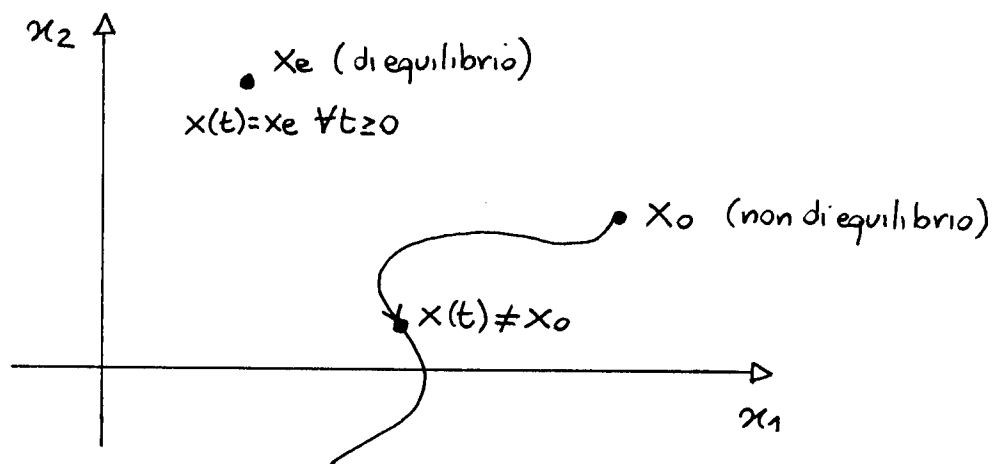


$\theta = 0$  e  $\theta = \pi$  sono posizioni di equilibrio.



(si assume assenza di disturbi, come per es. il vento)

Esempio -  $x \in \mathbb{R}^2$



Come determinare i punti di equilibrio di un sistema del tipo (TC.1)?

Un punto di equilibrio è caratterizzato dal fatto che

$$\varphi(t; x_e) = x_e \quad \forall t \geq 0$$

↙ costante

Dunque:  $\frac{d\varphi(t; x_e)}{dt} = 0$

Da cui, ricordando che  $\frac{d\varphi(t; x_e)}{dt} = f(\varphi(t; x_e))$  affinché  $\varphi(t; x_e)$  sia soluzione di (TC.1), deve essere:

$$f(\varphi(t; x_e)) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_e) = 0$$

I punti di equilibrio del sistema (TC.1) sono tutti e soli i punti  $x_e \in \mathcal{X}$  tali che

$f(x_e) = 0$

NOTA- eventuali soluzioni complesse dell'equazione vanno scartate, perché non hanno corrispondenza fisica.

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) - x_2(t) - 2 \\ \dot{x}_2(t) = \log(2x_1(t) + 2x_2(t) + 1) \end{cases}$$

I punti di equilibrio del sistema si determinano risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 0 = x_1^2 - x_2 - 2 \\ 0 = \log(2x_1 + 2x_2 + 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - x_2 - 2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - x_2 - 2 = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \quad x_2 = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow x_{eq,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = -2 \Rightarrow x_{eq,2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Il sistema ha due punti di equilibrio.

Tempo discreto

Consideriamo un sistema autonomo e stazionario descritto dalle relazioni:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) & \text{(TD.1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 & \text{(TD.2)} \end{cases}$$

dove  $x \in \mathbb{R}^n$  è lo stato,  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme aperto.

Denotiamo la soluzione di (TD.1)-(TD.2) con

$$\varphi(k; x_0)$$

In particolare, dunque:

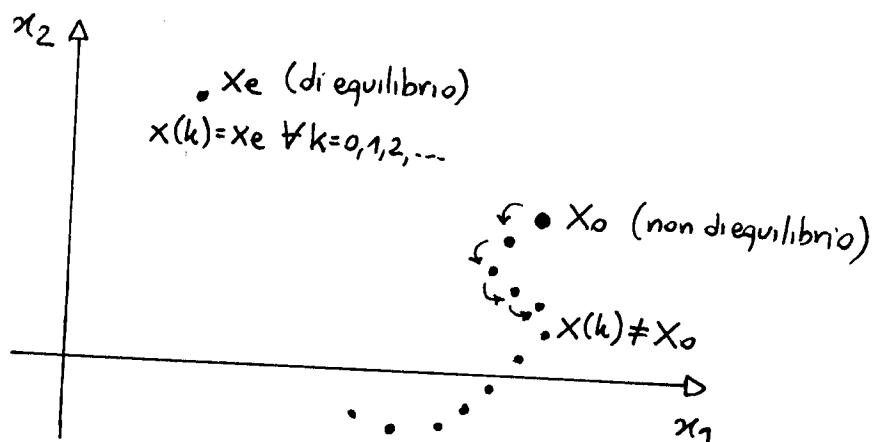
- per (TD.1):  $\varphi(k+1; x_0) = f(\varphi(k; x_0))$

- per (TD.2):  $\varphi(0; x_0) = x_0$

5

DEFINIZIONE -  $x_e \in X$  si dice punto di equilibrio per il sistema (TD.1) se  
 $\varphi(k; x_e) = x_e$  per ogni  $k=0, 1, 2, \dots$

Esempio -  $x \in \mathbb{R}^2$



Come determinare i punti di equilibrio di un sistema del tipo (TD.1)?  
 Un punto di equilibrio è caratterizzato dal fatto che

$$\varphi(k; x_e) = x_e \quad \forall k=0, 1, 2, \dots$$

Dunque:

$$x_e = \varphi(k+1; x_e) = f(\varphi(k; x_e)) = f(x_e)$$

↳ affinché  $\varphi(k; x_e)$  sia soluzione di (TD.1)

I punti di equilibrio del sistema (TD.1) sono tutti e soli i punti  $x_e \in X$  tali che

$$f(x_e) = x_e$$

NOTA - eventuali soluzioni complesse dell'equazione vanno scartate, perché non hanno corrispondenza fisica.

Esempio

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1^2(k) x_2(k) + \alpha x_1(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{1}{2} x_2(k) + 3 \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$  è un parametro

I punti di equilibrio del sistema si determinano risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^2 x_2 + \alpha x_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} x_2 + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 (x_1 x_2 + \alpha - 1) = 0 \\ \frac{3}{2} x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 (2x_1 + \alpha - 1) = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$x_1 = \begin{cases} 0 \\ \frac{1-\alpha}{2} \end{cases} \Rightarrow x_{eq,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{eq,2} = \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Il sistema ha due punti di equilibrio per  $\alpha \neq 1$ , e un solo punto di equilibrio per  $\alpha = 1$  ( $x_{eq,1}$  e  $x_{eq,2}$  coincidono).

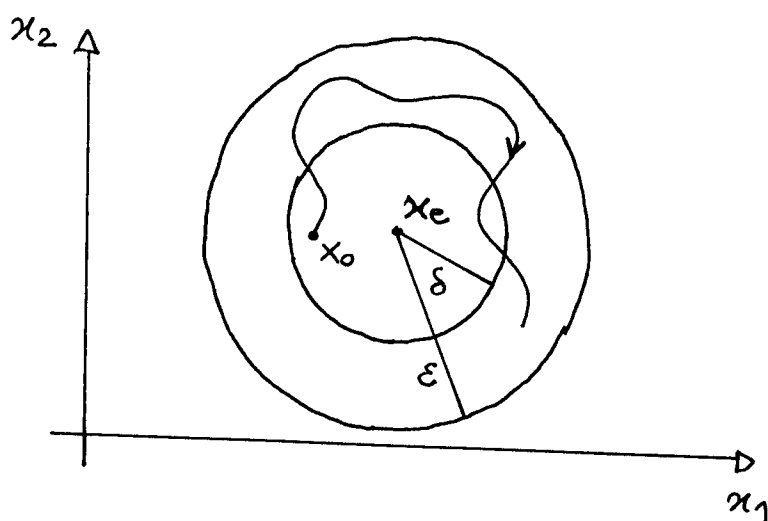
# STABILITÀ DI PUNTI DI EQUILIBRIO

(8)

DEFINIZIONE - Un punto di equilibrio  $x_e$  del sistema (TC.1) si dice STABILE se

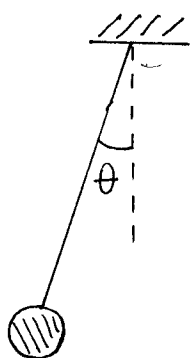
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \| \varphi(t; x_0) - x_e \| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0 \text{ e}$$

$$\forall x_0 \in \mathcal{X}: \| x_0 - x_e \| \leq \delta$$



~> Partendo da una condizione iniziale  $x_0$  nell'intorno di raggio  $\delta$  di  $x_e$ , la traiettoria  $\varphi(t; x_0)$  del sistema non esce mai dall'intorno di raggio  $\varepsilon$  di  $x_e$ .

Esempio - pendolo rigido



La posizione di equilibrio  $\theta = 0$  è stabile perché, perturbando di poco il pendolo da tale posizione, si instaurano oscillazioni la cui ampiezza intorno alla posizione di equilibrio non aumenta.

NOTA: In questo caso si può scegliere  $\delta = \varepsilon$ .

DEFINIZIONE - Un punto di equilibrio  $x_e$  del sistema (TD.1) si dice

STABILE se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \|\varphi(k; x_0) - x_e\| \leq \varepsilon \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \text{ e}$$

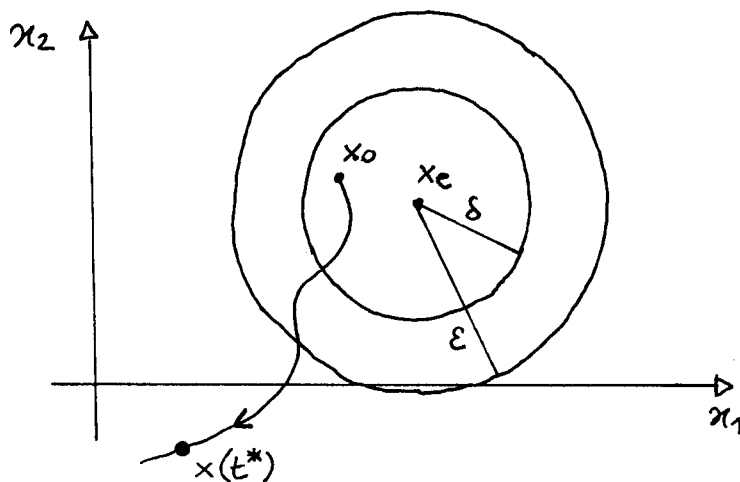
$$\forall x_0 \in \mathcal{X}: \|x_0 - x_e\| \leq \delta.$$

DEFINIZIONE - Un punto di equilibrio si dice INSTABILE se non è stabile.

Per esempio, a tempo continuo:

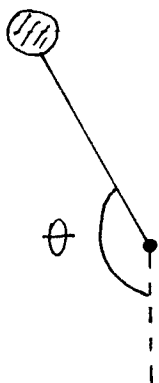
$$x_e \text{ INSTABILE} \iff$$

$$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0 \exists x_0 \in \mathcal{X}: \|x_0 - x_e\| \leq \delta \text{ e } t^* > 0: \|\varphi(t^*; x_0) - x_e\| > \varepsilon$$



$\Rightarrow$  In ogni intorno di raggio  $\delta$  di  $x_e$  esiste una condizione iniziale  $x_0$  tale che la corrispondente traiettoria del sistema non è interamente contenuta nell'intorno di raggio  $\varepsilon$  di  $x_e$ .

Esempio - pendolo rigido



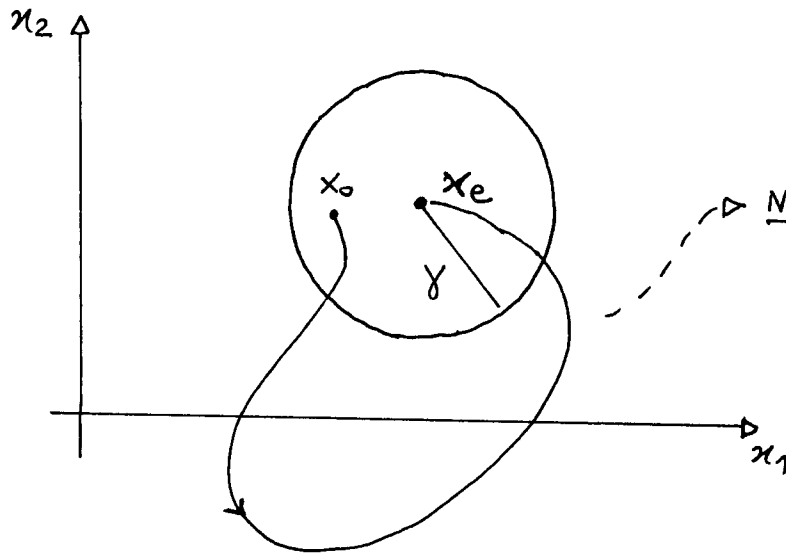
La posizione di equilibrio  $\theta = \pi$  è instabile perché, perturbando pur di poco il pendolo da tale posizione, esso cade verso il basso.

NOTA - In questo caso basta scegliere  $\varepsilon$  molto piccolo.

DEFINIZIONE - Un punto di equilibrio  $x_e$  del sistema (TC.1)

si dice ATTRATTIVO se

$$\exists \gamma > 0: \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t; x_0) - x_e\| = 0 \quad \forall x_0 \in \mathcal{X}: \|x_0 - x_e\| \leq \gamma$$



▷ NOTA - È ammesso che la traiettoria possa uscire temporaneamente dall'intorno di raggio  $\gamma$  di  $x_e$ .

~> Comunque si scelga una condizione iniziale  $x_0$  nell'intorno di raggio  $\gamma$  di  $x_e$ , la corrispondente traiettoria tende asintoticamente a  $x_e$ .

Esempio - pendolo rigido con attrito



La posizione di equilibrio  $\theta = 0$  è attrattiva, perché, perturbando il pendolo da tale posizione, si instaurano oscillazioni la cui ampiezza intorno alla posizione di equilibrio progressivamente si smorza a causa dell'attrito.

DEFINIZIONE - Un punto di equilibrio  $x_e$  del sistema (TD.1)

si dice ATTRATTIVO se

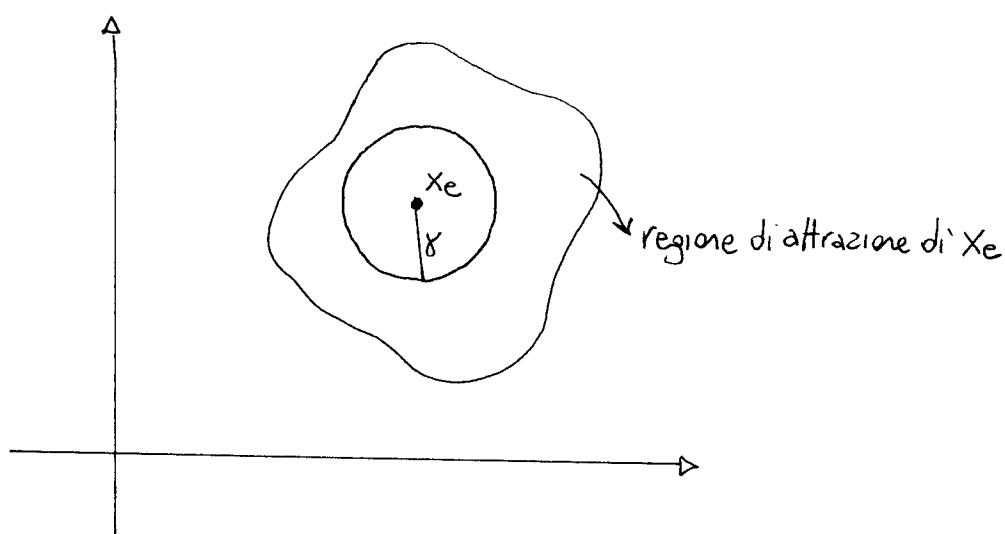
$$\exists \gamma > 0: \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi(k; x_0) - x_e\| = 0 \quad \forall x_0 \in \mathcal{X}: \|x_0 - x_e\| \leq \gamma$$

DEFINIZIONE - Se il punto di equilibrio  $x_e$  del sistema (TC.1)

o (TD.1) è attrattivo, l'insieme delle condizioni iniziali  $x_0$  tali che

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t; x_0) - x_e\| = 0$  nel caso di (TC.1)
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi(k; x_0) - x_e\| = 0$  nel caso di (TD.1)

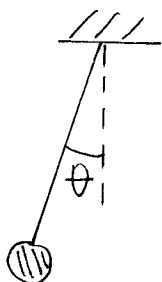
si dice REGIONE (o BACINO) DI ATTRAZIONE di  $x_e$ .



ATTENZIONE!

- Un punto di equilibrio può essere stabile e non attrattivo.

Esempio - pendolo rigido senza attrito



La posizione di equilibrio  $\theta = 0$  è stabile ma non attrattiva, perché perturbando il pendolo da tale posizione, si instaurano oscillazioni la cui ampiezza intorno alla posizione di equilibrio non si smorza, in assenza di attrito.

- Un punto di equilibrio può essere attrattivo e instabile.

DEFINIZIONE - Un punto di equilibrio stabile e attrattivo si dice ASINTOTICAMENTE STABILE.