EVITARE DI INVERTIRE T

Abbiamo visto che il calcolo di e^{At} e A^k e\` finalizzato al calcolo della risposta libera di sistemi lineari stazionari:

$$x(t) = e^{At}x_0 = T e^{\tilde{A}t} T^{-1} x_0 \qquad \text{TC}$$

$$x(k) = A^k x_0 = T \tilde{A}^k T^{-1} x_0 \qquad \text{TD}$$

Posto $\alpha = T^{-1}x_0$, e\` possibile calcolare α senza invertire la matrice T?

$\Rightarrow$ α è $\underline{\underline{\text{la}}}$ soluzione del sistema lineare:

$$\boxed{T\alpha = x_0}$$

dove α è il vettore delle incognite.

Esempio (si riprenda l'esercizio svolto per il caso di diagonalizzazione con autovalori complessi)

Calcolare la risposta libera del sistema

$$\dot{x}(t) = A\,x(t), \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

con condizione iniziale $x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Soluzione

Nella soluzione dell'esercizio svolto abbiamo visto che:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) & 0 \\ -\sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = T e^{\tilde{A}t} \alpha$$

dove α è la soluzione del sistema lineare $T\alpha = x_0$.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right.}_{T} \underbrace{\left|\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right]}_{x_0} \longrightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{\text{scambio riga 1 e riga 2}} \longrightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]}_{\substack{\text{riga2} \leftarrow -\text{riga2} \\ \text{riga3} \leftarrow \text{riga3} - \text{riga1}}}$$

sistema $\begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) & 0 \\ -\sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos(2t)+\sin(2t) \\ \sin(2t)+\cos(2t) \\ 2e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(2t)-\cos(2t) \\ -\cos(2t)+\sin(2t) \\ -\cos(2t)+\sin(2t)+2e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}.$$

Verifica

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_0 \qquad \text{ok}$$

$x(t)$ calcolata per $t=0$.

ANALISI MODALE

Definizione - Dato il sistema lineare stazionario a tempo continuo

$$\dot{x}(t)=Ax(t)$$

si dicono MODI DEL SISTEMA tutte le funzioni differenti che si trovano nell'esponenziale $e^{\tilde{A}t}$ di una forma di Jordan reale a blocchi $\tilde{A}$ della matrice A.

esempio

$$\dot{x}(t)=Ax(t) \quad \text{con} \quad A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(vedere l'esercizio svolto per il caso di jordanizzazione)

$$\Rightarrow \tilde{A}=\left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad e^{\tilde{A}t}=\left[\begin{array}{c|cc} e^{-t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{2t} & e^{2t}t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right]$$

- forma di Jordan reale a blocchi di A -

I modi del sistema sono: $e^{2t}, e^{2t}t, e^{-t}$.

Definizione - Dato il sistema lineare stazionario a tempo discreto

$$x(k+1)=Ax(k)$$

si dicono MODI DEL SISTEMA tutte le successioni differenti che si trovano nella potenza $\tilde{A}^k$ di una forma di Jordan reale a blocchi $\tilde{A}$ della matrice A.

esempio

$$x(k+1)=Ax(k) \quad \text{con} \quad A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(vedere l'esercizio svolto per il caso di diagonalizzazione con autovalori complessi)

$$\Rightarrow \tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{A}^k = \left[\begin{array}{cc|c} 2^k \cos(k\frac{\pi}{2}) & 2^k \sin(k\frac{\pi}{2}) & 0 \\ -2^k \sin(k\frac{\pi}{2}) & 2^k \cos(k\frac{\pi}{2}) & 0 \\ \hline 0 & 0 & (\frac{1}{2})^k \end{array}\right]$$

- forma di Jordan reale a blocchi di A -

I modi del sistema sono: $2^k \sin(k\frac{\pi}{2})$, $2^k \cos(k\frac{\pi}{2})$, $(\frac{1}{2})^k$.

Vediamo ora quali possono essere tutti e soli i modi di un sistema lineare stazionario...

Tempo Continuo

- autovalore reale λ

  I modi determinati dall'autovalore λ sono del tipo:

  $$e^{\lambda t},\ e^{\lambda t} t,\ e^{\lambda t} \frac{t^2}{2},\ \dots,\ e^{\lambda t} \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!}$$

  dove ℓ è la dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a λ.

  - se $\lambda < 0$: tutti i modi sono convergenti a 0 per $t \to \infty$
  - se $\lambda > 0$: tutti i modi sono divergenti per $t \to \infty$
  - se $\lambda = 0$:
    * il modo $e^{\lambda t} = e^{0 \cdot t} = 1$ è limitato per ogni t
    * i modi $e^{\lambda t} \frac{t^h}{h!} = e^{0 \cdot t} \frac{t^h}{h!} = \frac{t^h}{h!}$ con $h = 1, \dots, \ell-1$

      sono divergenti per $t \to \infty$

- autovalore complesso $\lambda = \sigma + i\omega$ con $\omega > 0$

  I modi determinati dall'autovalore λ (e dal suo coniugato λ^*) sono del tipo:

  $$e^{\sigma t} \sin(\omega t),\ e^{\sigma t} t \sin(\omega t),\ e^{\sigma t} \frac{t^2}{2} \sin(\omega t),\ \dots,\ e^{\sigma t} \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \sin(\omega t)$$

(e analoghi con $\cos(\omega t)$), dove ℓ è la dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a λ.

- se $\sigma<0$: tutti i modi sono convergenti a 0 per $t\to\infty$
- se $\sigma>0$: tutti i modi sono divergenti per $t\to\infty$
- se $\sigma=0$:
  * il modo $e^{\sigma t}\sin(\omega t)=e^{0\cdot t}\sin(\omega t)=\sin(\omega t)$ è limitato per ogni t
  * i modi $e^{\sigma t}\frac{t^h}{h!}\sin(\omega t)=e^{0\cdot t}\frac{t^h}{h!}\sin(\omega t)=\frac{t^h}{h!}\sin(\omega t)$ con $h=1,\dots,\ell-1$ sono divergenti per $t\to\infty$.

Tempo Discreto

- autovalore reale λ

I modi determinati dall'autovalore λ sono del tipo:

$$\lambda^k,\ \lambda^{k-1}\underbrace{\binom{k}{1}}_{k},\ \lambda^{k-2}\underbrace{\binom{k}{2}}_{\frac{k(k-1)}{2}},\ \dots,\ \lambda^{k-\ell+1}\underbrace{\binom{k}{\ell-1}}_{\frac{k(k-1)\dots(k-\ell+2)}{(\ell-1)!}}$$

dove ℓ è la dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a λ.

NOTA- Coefficiente binomiale $\binom{k}{h}=\frac{k!}{h!(k-h)!}=\frac{k(k-1)\dots(k-h+1)}{h!}$

- se $|\lambda|<1$: tutti i modi sono convergenti a 0 per $k\to\infty$
- se $|\lambda|>1$: tutti i modi sono divergenti per $k\to\infty$
- se $|\lambda|=1$:
  * il modo λ^k [che può essere $1^k=1$ o $(-1)^k$] è limitato per ogni k
  * i modi $\lambda^{k-h}\binom{k}{h}$ [che possono essere $\binom{k}{h}$ o $(-1)^{k-h}\binom{k}{h}$] con $h=1,\dots,\ell-1$ sono divergenti per $k\to\infty$.

- <u>autovalore complesso $\lambda = \rho e^{i\theta}$ con $\rho > 0$ e $\theta \in (0, \pi)$</u>

I modi determinati dall'autovalore λ (e dal suo coniugato λ^*) sono del tipo:

$$\rho^k \sin(k\theta),\ \rho^{k-1}\binom{k}{1}\sin(k\theta),\ \rho^{k-2}\binom{k}{2}\sin(k\theta),\ \dots,\ \rho^{k-\ell+1}\binom{k}{\ell-1}\sin(k\theta)$$

(e analoghi con $\cos(k\theta)$), dove ℓ è la dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a λ.

- se $\rho < 1$: tutti i modi sono <u>convergenti a 0</u> per $k \to \infty$
- se $\rho > 1$: tutti i modi sono <u>divergenti</u> per $k \to \infty$
- se $\rho = 1$:
  * il modo $\rho^k \sin(k\theta) = \sin(k\theta)$ è <u>limitato</u> per ogni k
  * i modi $\rho^k \binom{k}{h}\sin(k\theta) = \binom{k}{h}\sin(k\theta)$ con $h = 1, \dots, \ell-1$ sono <u>divergenti</u> per $k \to \infty$.

ALGEBRICAMENTE EQUIVALENTI

Il procedimento che abbiamo finora seguito per il calcolo di e^{At} e A^k:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\times" marking] \arrow[d] & e^{At}, A^k \\ \tilde{A} \arrow[r] & e^{\tilde{A}t}, \tilde{A}^k \arrow[u] \end{tikzcd}$$

è solo un artificio algebrico, oppure possiede un'interpretazione fisica?

<u>Tempo Continuo</u>

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

x è lo stato del sistema.

Data $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare, definiamo un nuovo stato:

$$z = T^{-1}x$$

Qual è l'equazione dinamica che regola l'evoluzione di z?

$$\dot{z}(t) = T^{-1}\dot{x}(t) = T^{-1}\left[Ax(t) + Bu(t)\right] =$$

$$= T^{-1}Ax(t) + T^{-1}Bu(t) \underset{x(t) = Tz(t)}{=} T^{-1}ATz(t) + T^{-1}Bu(t)$$

$$= \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t)$$

avendo posto: $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$.

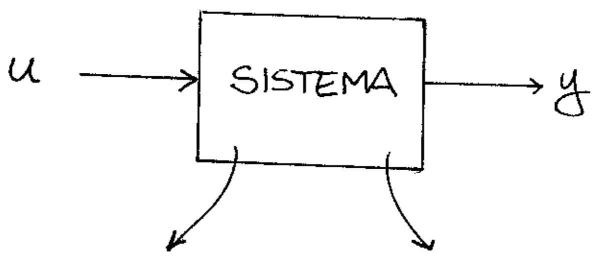
Inoltre:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = CTz(t) + Du(t)$$

$$= \tilde{C}z(t) + \tilde{D}u(t)$$

avendo posto: $\tilde{C} = CT$, $\tilde{D} = D$.

interpretazione



rappresentazione con stato x

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

rappresentazione con stato z

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}z(t) + \tilde{D}u(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Le due rappresentazioni sono algebricamente equivalenti se esiste T non singolare tale che:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{A} = T^{-1}AT \\ &\tilde{B} = T^{-1}B \\ &\tilde{C} = CT \\ &\tilde{D} = D \\ &x_0 = Tz_0 \end{aligned}\right\} (*)$$

<u>COROLLARIO</u> - Lo stato di un sistema <u>non</u> è unico.

<u>Tempo Discreto</u>

Ragionamenti assolutamente analoghi possono essere ripetuti a tempo discreto.

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Data $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ <u>non singolare</u>, definiamo un <u>nuovo stato</u>:

$$z = T^{-1}x$$

L'equazione dinamica che regola l'evoluzione di z si ottiene semplicemente:

$$z(k+1) = T^{-1}x(k+1) = T^{-1}\left[Ax(k) + Bu(k)\right] =$$

$$= T^{-1}Ax(k) + T^{-1}Bu(k) \underset{x(k)=Tz(k)}{=} T^{-1}ATz(k) + T^{-1}Bu(k)$$

$$= \tilde{A}z(k) + \tilde{B}u(k)$$

avendo posto $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$.

Per l'equazione di uscita si ricava ancora:

$$y(k) = \tilde{C}z(k) + \tilde{D}u(k)$$

avendo posto $\tilde{C} = CT$, $\tilde{D} = D$.

L' <u>equivalenza algebrica</u> delle due rappresentazioni:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z(k+1) = \tilde{A}z(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) = \tilde{C}z(k) + \tilde{D}u(k) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

si ha dunque ancora se e solo se esiste T <u>non singolare</u> tale che valgono le relazioni (*).

Quello che abbiamo fatto finora e' stato determinare una <u>trasformazione</u> dello stato del sistema in un nuovo stato rispetto al quale fosse piu' "facile" calcolare la risposta libera. Infatti:

<u>risposta libera in z</u>

$$z(t) = e^{\tilde{A}t} z_0 \qquad \text{TC}$$

$$z(k) = \tilde{A}^k z_0 \qquad \text{TD}$$

Applicando la trasformazione $z = T^{-1}x$, per cui:

- $z_0 = T^{-1}x_0$
- $x = Tz$

otteniamo:

$$x(t) = Tz(t) = Te^{\tilde{A}t} z_0 = \underbrace{Te^{\tilde{A}t}T^{-1}}_{e^{At}} x_0 \qquad \text{TC}$$

$$x(k) = Tz(k) = T\tilde{A}^k z_0 = \underbrace{T\tilde{A}^k T^{-1}}_{A^k} x_0 \qquad \text{TD}$$