

Cosa si può fare quando la matrice A non è diagonalizzabile?

Ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ può essere trasformata in forma di Jordan...

CASO PARTICOLARE

- $n=3$
- due autovalori reali: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- per λ_1 : $\mu_1=1=\nu_1$
- per λ_2 : $\mu_2=2>1=\nu_2$

$\Rightarrow A$ non è diagonalizzabile

Siano:

- $v_1 \in \mathbb{R}^n$ autovettore relativo a $\lambda_1 \Rightarrow Av_1 = \lambda_1 v_1$
- $v_2 \in \mathbb{R}^n$ autovettore relativo a $\lambda_2 \Rightarrow Av_2 = \lambda_2 v_2$
- $v_3 \in \mathbb{R}^n$ autovettore generalizzato relativo a λ_2 :

$$Av_3 = \lambda_2 v_3 + v_2$$

Calcolato risolvendo il sistema lineare:

$$(A - \lambda_2 I) v_3 = v_2$$

$\hookrightarrow$ vettore delle incognite

Costruzione di T

$$T = [v_1 \mid v_2 \mid v_3]$$

Matrice $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{array} \right]$$

Matrici $e^{\tilde{A}t}$ e $\tilde{A}^k$

6

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t} t \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \lambda_2^{k-1} k \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}$$

Matrici e^{At} e A^k

Applicare

$$e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}$$

$$A^k = T \tilde{A}^k T^{-1}$$

Esempio - (si veda l'Esercizio svolto)