

Premessa

Ricordiamo che, se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore della matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e $v \in \mathbb{C}^n$ è un autovettore di A relativo a λ , allora

$$Av = \lambda v.$$

Consideriamo:

- $\lambda = \sigma + i\omega$, con $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$.
- $v = v^{(1)} + i v^{(2)}$, con $v^{(1)}, v^{(2)} \in \mathbb{R}^n$

Dalla relazione precedente risulta:

$$A[v^{(1)} + i v^{(2)}] = [\sigma + i\omega][v^{(1)} + i v^{(2)}]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Av^{(1)} + iAv^{(2)} &= \sigma v^{(1)} + i\sigma v^{(2)} + i\omega v^{(1)} - \omega v^{(2)} \\ &= [\sigma v^{(1)} - \omega v^{(2)}] + i[\omega v^{(1)} + \sigma v^{(2)}] \end{aligned}$$

Uguagliando le parti reali e le parti immaginarie di entrambi i membri, otteniamo:

$$\begin{cases} Av^{(1)} = \sigma v^{(1)} - \omega v^{(2)} \\ Av^{(2)} = \omega v^{(1)} + \sigma v^{(2)} \end{cases}$$

Scritte in forma matriciale:

$$A \begin{bmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

↓
chiamiamo N questa matrice

Della matrice N si sanno scrivere le forme e^{Nt} e N^k :

$$\bullet e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^{\sigma t} \cos(\omega t) & e^{\sigma t} \sin(\omega t) \\ -e^{\sigma t} \sin(\omega t) & e^{\sigma t} \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

NOTA- ω si chiama pułsazione dei modi sinusoidali.

- Essendo $\lambda = \sigma + i\omega$, con $\omega > 0$:

modulo: $\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$

fase: $\theta = \arccos\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)$

funzione "arccoseno"

esempi notevoli

$$\arccos(1) = 0$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

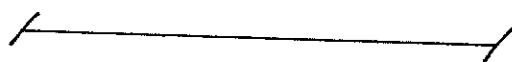
$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(-1) = \pi$$

$$N^k = \begin{bmatrix} \rho^k \cos(k\theta) & \rho^k \sin(k\theta) \\ -\rho^k \sin(k\theta) & \rho^k \cos(k\theta) \end{bmatrix}$$

NOTA - θ si chiama pulsazione dei modi sinusoidali.



Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ gli autovalori reali di A , e $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_c \in \mathbb{C}$ gli autovalori complessi di A con parte immaginaria positiva.

Scriviamo:

$$\lambda_j = \sigma_j + i\omega_j \quad \text{per } j = r+1, \dots, c \quad \text{NOTA - } \omega_j > 0$$

$$\lambda_j = \rho_j e^{i\theta_j} \quad \text{con } \rho_j = \sqrt{\sigma_j^2 + \omega_j^2} \quad \text{e } \theta_j = \arccos\left(\frac{\sigma_j}{\rho_j}\right)$$

NOTA - Tutti gli autovalori di A sono

$$\left\{ \underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_r}_{\text{reali}}, \underbrace{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_c}_{\text{complessi, con parte immaginaria positiva}}, \underbrace{\lambda_{r+1}^*, \dots, \lambda_c^*}_{\text{complessi, con parte immaginaria negativa}} \right\}$$

non sono esplicitamente presi in considerazione...

(3)

Assumiamo, per semplicità di notazione, che tutti gli autovalori siano distinti.

Dunque, A è sicuramente diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

Siano:

- $v_j \in \mathbb{R}^n$ autovettore relativo a λ_j , per $j=1, \dots, r$.
- $v_j = v_j^{(1)} + i v_j^{(2)}$, con $v_j^{(1)}, v_j^{(2)} \in \mathbb{R}^n$, autovettore relativo a λ_j , per $j=r+1, \dots, c$.

Costruzione di T

$$T = \left[v_1 \dots v_r \mid v_{r+1}^{(1)} v_{r+1}^{(2)} \mid \dots \mid v_c^{(1)} v_c^{(2)} \right]$$

Matrice $\tilde{A}$

Risulta:

$$\tilde{A} = T^{-1} A T =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ \hline & & & N_{r+1} \\ \hline & & & \ddots \\ \hline & & & N_c \end{bmatrix}$$

dove $N_j = \begin{bmatrix} \sigma_j & \omega_j \\ -\omega_j & \sigma_j \end{bmatrix}$
per $j=r+1, \dots, c$

Matrici $e^{\tilde{A}t}$ e $\tilde{A}^k$

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{\lambda_r t} & \\ \hline & & & e^{N_{r+1} t} \\ \hline & & & \ddots \\ \hline & & & e^{N_c t} \end{bmatrix}$$

dove $e^{N_j t} = \begin{bmatrix} e^{\sigma_j t} \cos(\omega_j t) & e^{\sigma_j t} \sin(\omega_j t) \\ -e^{\sigma_j t} \sin(\omega_j t) & e^{\sigma_j t} \cos(\omega_j t) \end{bmatrix}$
per $j=r+1, \dots, c$

$$\tilde{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r^k & \\ & & & N_{r+1}^k & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & N_c^k \end{bmatrix}$$

$$\text{dove } N_j^k = \begin{bmatrix} \rho_j^k \cos(k\theta_j) & \rho_j^k \sin(k\theta_j) \\ -\rho_j^k \sin(k\theta_j) & \rho_j^k \cos(k\theta_j) \end{bmatrix}$$

Matrici e^{At} e A^k

Applicare

$$e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}$$

$$A^k = T \tilde{A}^k T^{-1}$$

Esempio - (si veda l'Esercizio svolto)



NOTA DI ALGEBRA LINEARE

Se la matrice A ha una delle seguenti strutture:

- triangolare superiore a blocchi: $A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right]$

A_1 e A_2 quadrate

- triangolare inferiore a blocchi: $A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline A_3 & A_2 \end{array} \right]$

allora gli autovalori di A coincidono con l'unione degli autovalori di A_1 e A_2 .

