RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, si definiscono <u>AUTOVALORI</u> di A le radici del polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

<u>proprietà</u>

- Gli autovalori di A sono tutti e soli i valori $\lambda \in \mathbb{C}$ per i quali la matrice $\lambda I - A$ è singolare. Infatti, se λ_0 è autovalore di A, allora

  $$\det(\lambda_0 I - A) = 0$$

- Il polinomio $p_A(\lambda)$ è un polinomio monico di grado n nella variabile λ, cioè assume la forma

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

monico perché il coefficiente che moltiplica il termine di grado massimo è 1.

- $p_A(\lambda)$ possiede esattamente n radici (contate con la loro molteplicità) nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

- Dato che i coefficienti α_i del polinomio sono reali (perché A è una matrice reale), se $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ è radice di $p_A(\lambda)$, allora anche λ_0^* (complesso coniugato di λ_0) è radice di $p_A(\lambda)$.

Dette $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (con $m \leq n$) le radici distinte di $p_A(\lambda)$, si definisce MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA dell'autovalore λ_i la sua molteplicità come radice di $p_A(\lambda)$. Indicando le molteplicità algebriche con μ_i:

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{\mu_i}$$

molteplicità algebrica di λ_i

esempio

$$p_A(\lambda) = \lambda^6 - 7\lambda^5 + 12\lambda^4 + 14\lambda^3 - 59\lambda^2 + 57\lambda - 18 =$$
$$= (\lambda-1)^3(\lambda+2)(\lambda-3)^2$$

n = grado del polinomio = 6

m = numero di radici distinte = 3

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mu_1 = 3$

$\lambda_2 = -2 \Rightarrow \mu_2 = 1$

$\lambda_3 = 3 \Rightarrow \mu_3 = 2$

Si dicono AUTOVETTORI di A relativi all'autovalore λ_i tutti i vettori non nulli $v \in \mathbb{C}^n$ taliche

$$(\lambda_i I - A)v = 0$$

si osservi che questo sistema omogeneo ammette soluzioni non banali in quanto λ_i è autovalore di A, e quindi $\lambda_i I - A$ è una matrice singolare.

oppure, equivalentenente:

$$Av = \lambda_i v$$

Si definisce AUTOSPAZIO di A relativo all'autovalore λ_i il sottospazio vettoriale

$$\mathcal{V}_i = \ker(\lambda_i I - A) \subseteq \mathbb{C}^n$$

nucleo

NOTA- $\ker(A) = \{x : Ax = 0\}$

- $\mathcal{V}_i$ è formato da tutti gli autovettori di A relativi all'autovalore λ_i, e dal vettore nullo.

Si definisce MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA dell'autovalore λ_i, e si indica con ν_i, la dimensione del corrispondente autospazio $\mathcal{V}_i$:

$$\nu_i = \dim\left[\ker(\lambda_i I - A)\right]$$

$$= n - \text{rango}(\lambda_i I - A)$$

NOTA- Vale sempre la seguente relazione:

$$0 < \nu_i \leq \mu_i$$

per ogni $i = 1, \ldots, m$.

Dunque, se $\mu_i = 1$, necessariamente $\nu_i = 1$.

DIAGONALIZZAZIONE

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice DIAGONALIZZABILE (su $\mathbb{C}$) se esiste una matrice $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ non singolare tale che la matrice

$$\Lambda = V^{-1} A V$$

è in forma diagonale, ossia:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare che, se la matrice A è diagonalizzabile, gli elementi sulla diagonale di Λ sono tutti e soli gli autovalori di A, ripetuti secondo la loro molteplicità algebrica.

Come è possibile determinare se una data matrice A è diagonalizzabile, oppure no?

1. Calcolare gli autovalori λ_i di A.
2. Determinare la molteplicità algebrica μ_i di ciascun autovalore λ_i.
3. Determinare la molteplicità geometrica ν_i di ciascun autovalore λ_i.
4. A è diagonalizzabile se e solo se $\mu_i = \nu_i$ per ogni autovalore λ_i.

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile, come è possibile trasformarla in una sua forma diagonale?

Distinguiamo due casi:

- tutti gli autovalori λ_i di A sono reali
- esistono autovalori λ_i di A complessi

CASO DI AUTOVALORI TUTTI REALI

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ gli autovalori distinti di A.

Per ogni autovalore λ_i, assumiamo $\mu_i = \nu_i$.

↳ la matrice A è diagonalizzabile

1. Determinare una base per ciascun autospazio $\mathcal{V}_i$

Indichiamo con $v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,\nu_i}$ i vettori di una base dell'autospazio $\mathcal{V}_i$ relativo all'autovalore λ_i.

sono in numero pari a $\nu_i = \mu_i$

2. Costruire T

$$T = \Big[\underbrace{v_{1,1} \dots v_{1,\nu_1}}_{\text{base di } \mathcal{V}_1} \quad \dots \quad \underbrace{v_{m,1} \dots v_{m,\nu_m}}_{\text{base di } \mathcal{V}_m} \Big]$$

↳ Le colonne di T sono i vettori di base degli autospazi.

3. Matrice Λ

Risulta:

$$\Lambda = T^{-1} A T =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
\lambda_1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & \lambda_1 & & & & \\
\hline
& & & \ddots & & & \\
\hline
& & & & \lambda_m & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & \lambda_m
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\b\\c\end{array}}\right\} \lambda_1 \text{ ripetuto } \nu_1 \text{ volte} \\
\\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\b\\c\end{array}}\right\} \lambda_m \text{ ripetuto } \nu_m \text{ volte}
\end{array}$$

4. Matrici $e^{\Lambda t}$ e Λ^k

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & \\ & \ddots\, e^{\lambda_1 t} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{\lambda_m t} & \\ & & & & \ddots\, e^{\lambda_m t} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & & \\ & \ddots\, \lambda_1^k & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_m^k & \\ & & & & \ddots\, \lambda_m^k \end{bmatrix}$$

5. Matrici e^{At} e A^k

Applicare

$$e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}$$

$$A^k = T \Lambda^k T^{-1}$$

Esempio - (si veda l'Esercizio svolto)