MODELLI LINEARI STAZIONARI

Tempo Continuo ($t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \text{(TC.1)} \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & \text{(TC.2)} \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ e' lo stato

$u \in \mathbb{R}^p$ e' l'ingresso

$y \in \mathbb{R}^q$ e' l'uscita

Di conseguenza: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$.

Sia $t_0 \in \mathbb{R}$ l'istante iniziale e

$$x(t_0) = x_0 \qquad \text{(TC.3)}$$

la condizione iniziale al tempo t_0.

Si vuole determinare una funzione $x(t)$ che soddisfi (TC.1) e (TC.3).
Una volta determinata $x(t)$, $y(t)$ si ricava applicando (TC.2).

NOTA - un caso particolare ...

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a\,x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R} \text{ costante}$$

cerchiamo una funzione $x(t)$ la cui derivata sia uguale ad a volte la funzione stessa...
Ricordiamo la funzione esponenziale...

soluzione: $x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0$

verifica:

- $x(t_0) = e^{a\overbrace{(t_0-t_0)}^{0}} x_0 = e^0 x_0 = x_0$
- $\dot{x}(t) = a\,e^{a(t-t_0)} x_0 = a\left[e^{a(t-t_0)} x_0\right] = a\,x(t)$

In serie di potenze, la funzione esponenziale è espressa da

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}$$

Generalizziamo...

Esponenziale di matrice

Data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$e^{At} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

proprietà

- serie assolutamente convergente
- $e^{A \cdot 0} = I$ (matrice identità)
- $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2}$
- $\dfrac{d e^{At}}{dt} = A e^{At} = e^{At} A$

La soluzione di (TC.1) e (TC.3) è:

integrale di convoluzione

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} x_0}_{\text{RISPOSTA LIBERA}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{\text{RISPOSTA FORZATA}}$$

dipende solo dalla condizione iniziale x_0

dipende solo dall'ingresso $u(\cdot)$

Quindi, applicando la (TC.2):

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$= \underbrace{C e^{A(t-t_0)} x_0}_{\text{RISPOSTA LIBERA}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + Du(t)}_{\text{RISPOSTA FORZATA}}$$

Nota importante

Si osservi che la distinzione in risposta libera e risposta forzata riflette la proprietà di sovrapposizione degli effetti:

$$\eta(t; t_0, x_0, u(\cdot)) = \eta(t; t_0, x_0, 0) + \eta(t; t_0, 0, u(\cdot))$$

Tipicamente, per modelli stazionari si considera $t_0=0$. Quindi:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Tempo Discreto ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) & \text{(TD.1)} \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) & \text{(TD.2)} \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ è lo stato

$u \in \mathbb{R}^p$ è l'ingresso

$y \in \mathbb{R}^q$ è l'uscita

Di conseguenza: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$.

Sia $k_0 \in \mathbb{Z}$ l'istante iniziale e

$$x(k_0) = x_0 \qquad \text{(TD.3)}$$

la condizione iniziale al tempo k_0.

Si vuole determinare una successione $x(k)$ che soddisfi (TD.1) e (TD.3). Una volta determinata $x(k)$, $y(k)$ si ricava applicando (TD.2).

Si osservi che:

- $x(k_0) = x_0$
- $x(k_0+1) = Ax(k_0) + Bu(k_0)$
  $= Ax_0 + Bu(k_0)$
- $x(k_0+2) = Ax(k_0+1) + Bu(k_0+1)$
  $= A^2x_0 + ABu(k_0) + Bu(k_0+1)$
- $x(k_0+3) = Ax(k_0+2) + Bu(k_0+2)$
  $= A^3x_0 + A^2Bu(k_0) + ABu(k_0+1) + Bu(k_0+2)$

$\vdots$

Generalizzando, la soluzione di (TD.1) e (TD.3) e':

$$x(k) = \underbrace{A^{k-k_0}x_0}_{\substack{\text{RISPOSTA}\\ \text{LIBERA}}} + \underbrace{\sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-j-1}Bu(j)}_{\substack{\text{RISPOSTA}\\ \text{FORZATA}}}$$

somma di convoluzione

dipende solo dalla condizione iniziale x_0

dipende solo dall'ingresso $u(\cdot)$

Quindi, applicando la (TD.2):

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$
$$= \underbrace{CA^{k-k_0}x_0}_{\substack{\text{RISPOSTA}\\ \text{LIBERA}}} + \underbrace{\sum_{j=k_0}^{k-1} CA^{k-j-1}Bu(j) + Du(k)}_{\substack{\text{RISPOSTA}\\ \text{FORZATA}}}$$

Tipicamente, per modelli stazionari si considera $\underline{k_0=0}$. Quindi:

$$x(k) = A^kx_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1}Bu(j)$$

$$y(k) = CA^kx_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1}Bu(j) + Du(k)$$

CALCOLO DELLA RISPOSTA LIBERA

Consideriamo il calcolo di:

Tempo Continuo

$$x_\ell(t) = e^{At}x_0 \qquad \text{oppure} \qquad y_\ell(t) = Ce^{At}x_0$$

Tempo Discreto

$$x_\ell(k) = A^k x_0 \qquad \text{oppure} \qquad y_\ell(k) = CA^k x_0$$

Il problema si riconduce al seguente:

> Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, determinare l'espressione di e^{At} e A^k in forma chiusa.

Metodo per il calcolo di e^{At} e A^k

Data una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare (quindi invertibile), definiamo la matrice

$$\tilde{A} \triangleq T^{-1}AT \qquad (*)$$

Supponiamo di saper scrivere $e^{\tilde{A}t}$, oppure $\tilde{A}^k$, in forma chiusa (per esempio, se $\tilde{A}$ è in forma diagonale, è immediato scrivere $e^{\tilde{A}t}$ e $\tilde{A}^k$).

Invertendo la $(*)$:

$$A = T\tilde{A}T^{-1}$$

Da cui:

$$\begin{aligned}
A^k &= \overbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}^{k \text{ volte}} \\
&= (T\tilde{A}T^{-1})(T\tilde{A}T^{-1})\ldots(T\tilde{A}T^{-1}) \\
&= T\tilde{A}\overbrace{T^{-1}T}^{I}\tilde{A}T^{-1}\ldots T\tilde{A}T^{-1} \\
&= T\overbrace{\tilde{A} \cdot \tilde{A} \cdot \ldots \cdot \tilde{A}}^{k \text{ volte}}T^{-1} \\
&= T\tilde{A}^kT^{-1}
\end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{A^k = T\tilde{A}^kT^{-1}}$$

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} T\tilde{A}^k T^{-1} \frac{t^k}{k!} \\
&= T\left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{A}^k \frac{t^k}{k!}\right) T^{-1} \\
&= T e^{\tilde{A}t} T^{-1}
\end{aligned}
\qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}}
$$

Graficanente, il metodo considerato è il seguente:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\times" description] \arrow[d] & A^k \\
\tilde{A} \arrow[r] & \tilde{A}^k \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\times" description] \arrow[d] & e^{At} \\
\tilde{A} \arrow[r] & e^{\tilde{A}t} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$\times$ indica un passaggio che, in generale, non è immediato.

Esempio

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{At} = ? \qquad A^k = ?
$$

Supponiamo che ci venga data la matrice (vedreno in seguito come calcolarla...)

$$
T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

T è non singolare. Infatti, $\det(T) = 1 \neq 0$.

$$
T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{A}$ è in forma diagonale.

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{A}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ovviamente, $1^k = 1$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$

Da cui:

$$e^{At} = Te^{\tilde{A}t}T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^{t} & 2e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^{t} & -2e^{2t} + 2e^{t} \\ e^{2t} - e^{t} & -e^{2t} + 2e^{t} \end{bmatrix}$$

$$A^k = T\tilde{A}^kT^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^k & -2^k \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} - 1 & -2^{k+1} + 2 \\ 2^k - 1 & -2^k + 2 \end{bmatrix}$$

CASO NOTEVOLE - Matrici diagonali a blocchi

Se la matrice $\tilde{A}$ è in forma diagonale a blocchi:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \tilde{A}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \tilde{A}_\nu \end{bmatrix}$$

NOTA - Si intende che $\tilde{A}_i$ può essere anche un blocchetto scalare...

allora:

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\tilde{A}_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\tilde{A}_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & e^{\tilde{A}_\nu t} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^k = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \tilde{A}_\nu^k \end{bmatrix}$$

Questo caso è di interesse generale perché, data una <u>qualsiasi</u> matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, esistono procedure per trasformare la matrice A in una forma $\tilde{A}$ diagonale a blocchi nella quale ciascun singolo blocco $\tilde{A}_i$ sulla diagonale ha una struttura di cui si sa calcolare l'esponenziale $e^{\tilde{A}_i t}$ o la potenza $\tilde{A}_i^k$ <u>in forma chiusa</u>.