

Esercitazione di Sistemi Dinamici 19.11.2010

Esercizio 1.

In una riserva naturale viene censito annualmente il numero di coppie della specie X, distinguendo tra coppie in età non fertile e coppie in età fertile. Dall'analisi dei dati del censimento, risulta che:

- Il tasso di mortalità tra le coppie in età fertile è pari a $\alpha \in (0, 1)$, mentre è trascurabile tra le coppie in età non fertile.
- Ogni anno il numero di coppie nuove nate (in età non fertile) è pari a una frazione $\beta \in (0, 1)$ del numero di coppie in età fertile nell'anno precedente.

Inoltre è noto che, per la specie considerata, ogni coppia diventa fertile entro un anno dalla nascita, e che annualmente un numero di coppie in età fertile può essere introdotto dall'esterno nella riserva.

Si indichino con $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $y(t)$ rispettivamente il numero di coppie in età non fertile, il numero di coppie in età fertile, e il numero totale di coppie presenti nella riserva all'inizio dell'anno t -esimo ($t = 0, 1, 2, \dots$). Si indichi infine con $u(t)$ il numero di coppie in età fertile introdotto dall'esterno nella riserva nel corso dell'anno t -esimo.

a) Si determini il modello lineare stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= A \mathbf{x}(t) + B u(t) \\ y(t) &= C \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

che descrive l'evoluzione del sistema, dove $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]'$.

- b) Si studi la stabilità del sistema al variare dei parametri $\alpha \in (0, 1)$ e $\beta \in (0, 1)$.
- c) Posto $\alpha = \beta = 2/5$, e supponendo che non vengano introdotte dall'esterno coppie in età fertile, si determini una condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, se esiste, per cui il numero di coppie in età non fertile e fertile rimanga invariato per ogni t , con il numero totale di coppie nella riserva uguale a 35.
- d) Posto $\alpha = 1/2$ e $\beta = 3/16$, si calcoli l'andamento del numero totale di coppie nella riserva, supponendo che essa sia inizialmente vuota, e ogni anno vi vengano introdotte dall'esterno 5 coppie in età fertile.

Esercizio 2.

Dato il sistema nonlineare stazionario a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 1 + x_1^2(t) + \sin(x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_2(t) + \sin(x_1(t)) - u(t) \end{aligned}$$

si calcolino i punti di equilibrio del sistema per ingresso costante $u(t) = 3\pi$, e se ne discuta la stabilità.

Esercizio 3.

Sia dato il sistema stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= -\frac{3}{2}x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2(t+1) &= -\frac{1}{2}x_1(t) + x_2(t) + \alpha x_1^2(t)x_2(t), \end{aligned}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1. Posto $\alpha = 0$, studiare la stabilità e i modi del sistema.
2. Posto $\alpha = 1$, studiare la stabilità dei punti di equilibrio del sistema.