

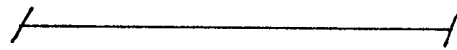
Esercizio

1

Studiare la stabilità del sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$, dove

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}a^2 & a^2-1 & \frac{1}{2}a^2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

e $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.



Calcoliamo gli autovalori della matrice A .

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = [\lambda - (a^2 - 1)] \det \begin{pmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda + \frac{3}{2} \end{pmatrix} =$$

↑
sviluppando il
calcolo del determinante
rispetto alla seconda colonna

$$= [\lambda - (a^2 - 1)] \left[\left(\lambda + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] = [\lambda - (a^2 - 1)] (\lambda^2 + 3\lambda + 2) =$$

$$= [\lambda - (a^2 - 1)] (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$
$$\lambda = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

Gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_1 = a^2 - 1$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 < 0$$

$$\lambda_3 = -2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 < 0$$

Procediamo ora allo studio della stabilità del sistema al variare del parametro a , ricordando che il sistema è a tempo continuo, e quindi ci interessa il segno [della parte reale] degli autovalori.

Abbiamo tre casi:

2

$$1) \quad \underline{\lambda_1 < 0 \iff a^2 - 1 < 0 \iff -1 < a < 1}$$

Dato che $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$, il sistema è asintoticamente stabile.

$$2) \quad \underline{\lambda_1 > 0 \iff a^2 - 1 > 0 \iff a < -1 \text{ oppure } a > 1}$$

Dato che $\lambda_1 > 0$, il sistema è instabile.

$$3) \quad \underline{\lambda_1 = 0 \iff a^2 - 1 = 0 \iff a = \pm 1}$$

In questo caso, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$.



Per questo autovalore, verifichiamo se vale $\mu_1 = \nu_1$.

In effetti, $\mu_1 = 1$ implica $\nu_1 = 1$, e quindi $\mu_1 = \nu_1$.

Dunque, il sistema è semplicemente stabile.