Esercizio 1 (esame 11/01/2007)

Dato il sistema lineare stazionario a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ \beta & \alpha & -1 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

dove α e β sono parametri reali:

1) Discutere la stabilità del sistema al variare di α e β

2) Posto $\alpha=0$ e $\beta=1$, determinare l'insieme delle condizioni iniziali $x(0)$ per cui la risposta libera $x_\ell(t)$ soddisfa

$$\lim_{t\to\infty} \|x_\ell(t)\| = 0$$

Calcolare la risposta libera con condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

---

1) Per studiare la stabilità del sistema, ci interessano gli autovalori di A.

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda-\alpha)\left[(\lambda+2)(\lambda+1) - \alpha\right] = (\lambda-\alpha)(\lambda^2+3\lambda+2-\alpha)$$

sviluppando il calcolo del determinante rispetto alla prima riga

Dunque gli autovalori di A sono:

- $\lambda_1 = \alpha$
- λ_2 e λ_3 radici di $\lambda^2+3\lambda+(2-\alpha)=0$

applicando la <u>regola di Cartesio</u>, osserviamo che λ_2 e λ_3 hanno entrambi parte reale negativa se e solo se $2-\alpha>0$ (<u>due permanenze</u>), cioè <u>$\alpha<2$</u>.

- Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$\lambda_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha < 0$

$$\left.\begin{array}{l} Re(\lambda_2) < 0 \\ Re(\lambda_3) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha < 2$$

Quindi $\alpha < 0$.

- Se $\alpha = 0$, abbiamo $\lambda_1 = 0$ con $\mu_1 = \nu_1$ (infatti, $\mu_1 = 1$ implica $\nu_1 = 1$); inoltre $Re(\lambda_2) < 0$ e $Re(\lambda_3) < 0$.

  Dunque, il sistema è semplicemente stabile.

- Se $\alpha > 0$, abbiamo $\lambda_1 > 0$, e il sistema risulta instabile.

Osserviamo che la stabilità del sistema è indipendente dal valore di β.

2) Ponendo $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, risulta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di A sono:

- $\lambda_1 = 0$
- λ_2 e λ_3 radici di $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = -1$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

Avendo tre autovalori distinti, A è diagonalizzabile, e la risposta libera $x_\ell(t)$ può essere espressa nella forma

$$x_\ell(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \alpha_3 e^{\lambda_3 t} v_3 =$$

$$= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 e^{-2t} v_2 + \alpha_3 e^{-t} v_3$$

dove v_1, v_2 e v_3 sono autovettori relativi a λ_1, λ_2 e λ_3, rispettivamente, e $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sono le coordinate della condizione iniziale $x(0)$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.

Osservando che $e^{-2t} \to 0$ e $e^{-t} \to 0$ per $t \to \infty$, otteniamo che $x_e(t) \to \alpha_1 v_1$ per $t \to \infty$.

Dato che $\alpha_1 v_1 = 0$ per avere $\lim_{t\to\infty} \|x_e(t)\| = 0$, e inoltre $v_1 \neq 0$ perchè è un autovettore, necessariamente dobbiamo imporre $\underline{\alpha_1 = 0}$.

Quindi le condizioni iniziali che garantiscono $\lim_{t\to\infty} \|x_e(t)\| = 0$ sono tutte e sole quelle esprimibili come

$$x(0) = \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \qquad \text{con } \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

<u>NOTA</u>: $x(0) = x_e(0) = \underbrace{\alpha_1 v_1}_{0} + \alpha_2 e^{-2t} v_2 + \alpha_3 e^{-t} v_3 \Big|_{t=0} = \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$

Ne risulta che abbiamo bisogno di calcolare solo v_2 e v_3 (v_1 non ci interessa).

<u>Per calcolare v_2:</u>

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sistema omogeneo: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ parametro libero: $x_2 = \alpha$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2}$

<u>Per calcolare v_3:</u>

$$\lambda_3 I - A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sistema omogeneo $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ parametro libero: $x_2 = \alpha$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

v_3

Quindi: $X(0) = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a+b \\ b \end{bmatrix}$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

<u>NOTA</u> - abbiamo chiamato $a = \alpha_2$ e $b = \alpha_3$.

Per calcolare la risposta libera con $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, verifichiamo dapprima se (al fine di evitare calcoli inutili e dispendiosi...) $x(0)$ è un autovettore di A relativo a qualche autovalore. Abbiamo:

$$A\,x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

quindi $x(0)$ è un autovettore di A relativo a $\lambda_1 = 0$. Segue che $x(0)$ è punto di equilibrio del sistema, e

$$x_e(t) = x(0) \quad \forall t \geq 0.$$