Esercizio

Si consideri il sistema:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t)$$

dove
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1. Studiare la stabilità del sistema
2. Determinare i modi del sistema
3. Calcolare la risposta libera del sistema con condizione iniziale $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
4. Determinare l'insieme delle condizioni iniziali x_0 tali che:
$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$$

Calcoliamo gli autovalori del sistema.

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 3 & -3 \\ -\frac{3}{2} & \lambda+\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \lambda-\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) \underset{\text{sviluppiamo il determinante rispetto alla prima riga}}{=} (\lambda-2)\det\left(\begin{bmatrix} \lambda+\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \lambda-\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) - 3\det\left(\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \lambda-\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) +$$

$$-3\det\left(\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \lambda+\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (\lambda-2)\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{5}{2}\lambda - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}\right) - 3\left(-\frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{4} - \frac{9}{4}\right) - 3\left(-\frac{9}{4} + \frac{3}{2}\lambda + \frac{15}{4}\right) =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+1) - 3\left(-\frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{2}\right) - 3\left(\frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}\right)$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

AUTOVALORI	MOLT. ALG.	MOLT. GEOM.	
$\lambda_1 = 2$	$\mu_1 = 1$	$\nu_1 = 1$	$(\mu_1 = 1 \Rightarrow \nu_1 = 1)$
$\lambda_2 = -1$	$\mu_2 = 2$	$\nu_2 = \ldots ?$	

Stabilità

Dato che $\lambda_1 > 0$ si può immediatamente concludere che il sistema è INSTABILE.

Modi del sistema

Calcoliamo $\nu_2 = \dim(\ker(A - \lambda_2 I))$

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A - \lambda_2 I) = 1$$

sottraggo alla 2ª e alla 3ª riga la 1ª moltiplicata per $\frac{1}{2}$, poi moltiplico la 1ª riga per $\frac{1}{3}$...

RIDUZIONE A SCALA DI GAUSS-JORDAN

$$\dim(\ker(A - \lambda_2 I)) = \underbrace{n}_{\text{dimensione dello stato}} - \text{rango}(A - \lambda_2 I) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{\nu_2 = 2}$$

Dato che $\mu_1 = \nu_1$ e $\mu_2 = \nu_2$ la matrice A è diagonalizzabile.

Dunque esiste una matrice T di cambio di coordinate tale che:

$$\Lambda = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Essendo:

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

i modi del sistema sono: e^{2t}, e^{-t}

(tutte le funzioni distinte che troviamo in $e^{\Lambda t}$)

Calcolo della risposta libera

$$x(t) = e^{At} x_0 = T e^{\Lambda t} T^{-1} x_0$$

Calcoliamo la matrice T di cambio di coordinate.

Consideriamo λ_1.

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

moltiplico la 1ª riga per $-\frac{1}{3}$, la 2ª per $\frac{2}{3}$ e la 3ª per $\frac{2}{3}$; scambio la 1ª e la 2ª riga

sottraggo alla 3ª riga la 1ª

RIDUZIONE A SCALA DI GAUSS-JORDAN

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

sottraggo alla 3ª riga la 2ª moltiplicata per 2

sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Poniamo $x_3 = \alpha$.

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - x_3 = 2\alpha \\ x_2 = x_3 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha$$

v_1 AUTOVETTORE RELATIVO A λ_1

Consideriamo λ_2.

$$A-\lambda_2 I = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

stessa riduzione a scala di prima ...

sistema omogeneo associato

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

Poniamo $x_2 = \alpha$ e $x_3 = \beta$.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 = \alpha - \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} \alpha + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3} \beta$$

AUTOVETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI
RELATIVI A λ_2.

La matrice T di cambio di coordinate si costruisce come:

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = T e^{\Lambda t} T^{-1} x_0$$

$$= T e^{\Lambda t} z_0$$

$$= e^{2t} \alpha_1 v_1 + e^{-t} (\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3)$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$ coordinate di x_0 rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$:

$$x_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

z_0 si ottiene risolvendo il sistema lineare $T z_0 = x_0$:

$$\begin{cases} 2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=3 \\ \alpha_1+\alpha_2=1 \\ \alpha_1+\alpha_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1=-\alpha_3 \\ \alpha_2=1-\alpha_1=1+\alpha_3 \\ -2\alpha_3+1+\cancel{\alpha_3}-\cancel{\alpha_3}=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1=1 \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_3=-1 \end{cases}$$

Dunque:

$$x(t)=e^{2t}v_1-e^{-t}v_3=\begin{bmatrix} 2e^{2t}+e^{-t} \\ e^{2t} \\ e^{2t}-e^{-t} \end{bmatrix}.$$

→ Ritornando alla generica espressione di $x(t)$:

$$x(t)=e^{2t}\alpha_1 v_1+e^{-t}\left(\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3\right)$$

Si osserva che $e^{2t}\to\infty$ e $e^{-t}\to 0$ per $t\to\infty$.

Dunque, affinché $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$, deve essere $\boxed{\alpha_1=0}$,

cioè la condizione iniziale x_0 non deve avere componente lungo l'autospazio relativo all'autovalore <u>instabile</u> λ_1.

Le condizioni iniziali che soddisfano questa condizione sono date da:

$$x_0=T\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}=\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3$$

al variare di $\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$. Sono quindi tutte le condizioni iniziali appartenenti al sottospazio lineare generato da v_2 e v_3.