

Esercizio

Calcolare la risposta libera del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ e $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$x(t) = e^{At} x_0$$

- Calcoliamo gli autovalori di A .

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 5 & \lambda + 2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda + 2) + 5 = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16$$

$$\Delta \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm j4}{2} = -1 \pm 2j$$

$$\boxed{\lambda_1 = -1 + 2j}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1^* = -1 - 2j$$

$\Delta \rightarrow$ Consideriamo λ_1 perché ha parte immaginaria positiva.

$$\bullet A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1 - 2j & 1 \\ -5 & -1 - 2j \end{bmatrix}$$

Risolviamo il sistema omogeneo associato:

$$\begin{bmatrix} 1-2j & 1 \\ -5 & -1-2j \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+4 & 1+2j \\ -5 & -1-2j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1+2j \\ -5 & -1-2j \end{bmatrix} \quad (9)$$

moltiplica
prima riga
per $1+2j$

$$(1+2j)(1-2j) = 1 - 2j + 2j + 4$$

Righe linearmente
dipendenti

$\Rightarrow$ ne possiamo scartare una...

Consideriamo la prima equazione:

$$(1-2j)x_1 + x_2 = 0$$

$$\text{Poniamo } x_1 = \alpha \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -(1-2j)\alpha \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+2j \end{bmatrix} \alpha$$

$$\Downarrow \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+2j \end{bmatrix} \text{ e' un autovettore di } A \text{ relativo a } \lambda_1$$

$$\Rightarrow v = v_1 + j v_2 \quad \text{dove } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

parte reale
di v

parte immaginaria
di v

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad \text{dove } \sigma = \text{Re}(\lambda_1) = -1$$

$$\omega = \text{Im}(\lambda_1) = 2$$

parte
immaginaria

$$e^{\tilde{A}t} = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}$$

10

- I modi del sistema sono tutte le funzioni differenti che troviamo in $e^{\tilde{A}t}$: $e^{-t} \sin(2t)$, $e^{-t} \cos(2t)$ - MODI DEL SISTEMA

- Il sistema è asintoticamente stabile perché $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ e $\text{Re}(\lambda_2) < 0$.

- $x(t) = e^{At} x_0 = T e^{\tilde{A}t} \underbrace{T^{-1} x_0}_{\substack{\parallel \\ z_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}}$
→ coordinate di x_0 rispetto alla base $\{v_1, v_2\}$:
 $x_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

z_0 è soluzione del sistema lineare $T z_0 = x_0$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

non ci interessano, perché verranno moltiplicati per zero!

NOTA- si poteva anche osservare che $x_0 = v_1$! Dunque $x_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = v_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$

$$x(t) = T e^{\tilde{A}t} z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \cos(2t) & * \\ -e^{-t} \sin(2t) & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \cos(2t) \\ -e^{-t} \sin(2t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos(2t) \\ -e^{-t} \cos(2t) - 2e^{-t} \sin(2t) \end{bmatrix}$$