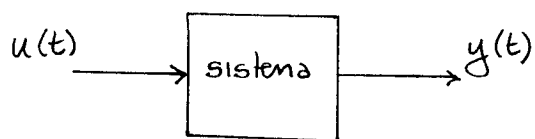


ESERCIZIO

1

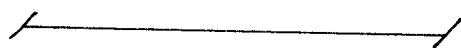
Dato il sistema



descritto dall'equazione differenziale

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + y(t) - 6y(t) = 2u(t)$$

- 1) scrivere una rappresentazione del sistema in forma di spazio di stato;
- 2) calcolare la risposta libera nell'uscita con condizioni iniziali
 $y(0)=0, \dot{y}(0)=3, \ddot{y}(0)=-3$.



1) Definiamo lo stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix}$$

Abbiamo:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = x_3(t)$$

dalla definizione di $x(t)$

$$\dot{x}_3(t) = \dddot{y}(t) = 6y(t) - \dot{y}(t) - 4\ddot{y}(t) + 2u(t)$$

$$= 6x_1(t) - x_2(t) - 4x_3(t) + 2u(t)$$

dall'equazione differenziale
del sistema

Dunque:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_B u(t) \quad \text{equazione dello stato}$$

Per quanto riguarda l'uscita:

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1(t) \quad \text{--- dalla definizione di } x(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C x(t) + \underbrace{0}_{D} \cdot u(t) \quad \text{equazione dell'uscita} \end{aligned}$$

2) Dobbiamo calcolare:

$$y_e(t) = C e^{At} x_0 \quad \text{risposta libera nell'uscita}$$

Innanzitutto, ricaviamo x_0 dai dati del problema:

$$x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

dalla definizione
di $x(t)$

Procediamo ora al calcolo di e^{At} , partendo dagli autovalori di A :

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -6 & 1 & \lambda + 4 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \text{---} \text{sviluppiamo il calcolo del determinante rispetto alla prima colonna}$$

3

$$= \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+4 \end{pmatrix} - 6 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda [\lambda(\lambda+4)+1] - 6 \cdot 1 =$$

$$= \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6$$

Per il calcolo delle radici di $p_A(\lambda)$, proviamo ad applicare il metodo di Ruffini, cercando le radici tra i divisori interi del termine noto -6, ossia $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Proviamo con $\lambda = 1$:

$$p_A(1) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6 \Big|_{\lambda=1} = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$$

Quindi $\lambda = 1$ è radice di $p_A(\lambda)$. Per abbassare il polinomio di grado:

	1	4	1	-6	← coefficienti del polinomio
radice → 1		1	5	6	
	1	5	6	//	

$$\Rightarrow p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 5\lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$\lambda = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$$

La matrice A ha tre radici distinte:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{con } \mu_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -2 \quad \text{con } \mu_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_2 = 1$$

$$\lambda_3 = -3 \quad \text{con } \mu_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_3 = 1$$

ed è quindi diagonalizzabile.

Procediamo al calcolo degli autovettori:

Per $\lambda_1 = 1$:

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -6 & 1 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sistema omogeneo: } \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_3 = \alpha$ (parametro libero), otteniamo:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 = \alpha \\ x_1 &= x_2 = \alpha \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↓
 v_1 , autovettore relativo a λ_1

Per $\lambda_2 = -2$:

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sistema omogeneo: } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_3 = \alpha$ (parametro libero), otteniamo:

5

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2}\alpha$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{4}\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\alpha \\ -\frac{1}{2}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$



v_2 , autovettore relativo a λ_2

Per $\lambda_3 = -3$:

$$\lambda_3 I - A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ -6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{sistema omogeneo: } \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_3 = \alpha$ (parametro libero), otteniamo:

$$x_2 = -\frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3}\alpha$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{9}\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}\alpha \\ -\frac{1}{3}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$



v_3 , autovettore relativo a λ_3

Definiamo la matrice T :

$$T = [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tale che

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Ricordiamo che $e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}$. Sostituendo in

$$y_e(t) = C e^{At} x_0$$

otteniamo:

$$y_e(t) = C T e^{\tilde{A}t} T^{-1} x_0$$

Per evitare di invertire T , definiamo $\alpha = T^{-1} x_0$, con $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$.
 α è soluzione del sistema lineare $T\alpha = x_0$.

Applicando il metodo della riduzione a scala per risolvere il sistema, abbiamo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}}_{x_0} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3 = 0 \\ -\frac{3}{4}\alpha_2 - \frac{4}{3}\alpha_3 = 3 \\ \frac{4}{3}\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\alpha_1 = 1 \\ &\uparrow \\ &-\frac{3}{4}\alpha_2 = 3 \Rightarrow \alpha_2 = -4 \\ &\uparrow \\ &\Rightarrow \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In conclusion:

7

$$y_e(t) = CT e^{\tilde{A}t} \alpha =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ -4e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix} = e^t - e^{-2t}$$