

ESERCIZIO

1

Scrivere una rappresentazione in forma di spazio di stato per il sistema descritto dall'equazione differenziale nonlineare

$$M\ell^2 \ddot{\theta}(t) + \beta \dot{\theta}(t) + M\ell g \sin(\theta(t)) = 0$$

dove M, ℓ, β e g sono parametri positivi.

Il sistema è autonomo, ^{senza ingressi} e cerchiamo una rappresentazione nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) & \text{equazione (dinamica) dello stato} \\ \theta(t) = g(x(t)) & \text{equazione (statica) dell'uscita} \end{cases}$$

↓
è la nostra "y" in questo caso...

Definiamo lo stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

↓
uguale per definizione

Da cui:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t) = x_2(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) = \ddot{\theta}(t) &= -\frac{1}{M\ell^2} \left[M\ell g \sin(\theta(t)) + \beta \dot{\theta}(t) \right] = \\ &= -\frac{1}{M\ell^2} \left[M\ell g \sin(x_1(t)) + \beta x_2(t) \right] \end{aligned}$$

Dunque

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{con} \quad f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{\beta}{M\ell^2} x_2 \end{bmatrix}$$

Inoltre:

2

$$\theta(t) = x_1(t) = g(x(t)) \quad \text{con} \quad g(x) = g(x_1, x_2) = x_1$$

Si noti che $g(x)$ è una funzione lineare (mentre $f(x)$ non lo è),
e può quindi essere scritta nella forma

$$g(x) = Cx \quad \text{con} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Infatti} \quad Cx = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1.$$