Esercizi

1) Dato il sistema descritto dall'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = \left(x(t)\right)^2 + u(t) \qquad (1)$$

dire se il sistema è lineare, applicando la definizione.

soluzione

Sia $x_1(t)$ la soluzione di (1) con condizione iniziale $x_1(0) = x_0$ e ingresso $u_1(t)$.

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = \left(x_1(t)\right)^2 + u_1(t)$$

Se il sistema fosse lineare, allora $x(t) = a\,x_1(t)$, con $a \neq 1$ costante, dovrebbe essere soluzione di (1) con condizione iniziale $x(0) = a\,x_0$ e ingresso $u(t) = a\,u_1(t)$. Ma:

$$\dot{x}(t) = a\,\dot{x}_1(t) = a\left[\left(x_1(t)\right)^2 + u_1(t)\right] = a\left(x_1(t)\right)^2 + a\,u_1(t)$$

$$\underset{(a\neq 1)}{\neq} \left(a\,x_1(t)\right)^2 + a\,u_1(t) = \left(x(t)\right)^2 + u(t)$$

Dunque $x(t)$ non è soluzione di (1). Il sistema NON è lineare.

---

2) Dato il sistema descritto dall'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = t\,x(t) + u(t) \qquad (2)$$

dire se il sistema è stazionario, applicando la definizione.

soluzione

Sia $x_1(t)$ la soluzione di (2) con condizione iniziale $x_1(0) = x_0$ e ingresso $u_1(t)$.

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = t\,x_1(t) + u_1(t)$$

Se il sistema fosse stazionario, allora $x_2(t) = x_1(t-T)$, con $T \neq 0$ costante, dovrebbe essere soluzione di (2) con condizione iniziale $x_2(T) = x_0$ e ingresso $u_2(t) = u_1(t-T)$. Ma:

$$\dot{x}_2(t) = \dot{x}_1(t-T) = (t-T)\,x_1(t-T) + u_1(t-T)$$

$$\underset{(T\neq 0)}{\neq} t\,x_1(t-T) + u_1(t-T) = t\,x_2(t) + u_2(t).$$

Dunque $x_2(t)$ non è soluzione di (2). Il sistema NON è stazionario.

---

3) Dato il sistema descritto ancora dall'equazione differenziale (2), dire se il sistema è lineare, applicando la definizione.

soluzione

Sia $x_1(t)$ la soluzione di (2) con condizione iniziale $x_1(t_0) = x_{1,0}$ e ingresso $u_1(t)$.

$$\Rightarrow \dot{x}_1(t) = t\,x_1(t) + u_1(t)$$

Sia $x_2(t)$ la soluzione di (2) con condizione iniziale $x_2(t_0) = x_{2,0}$ e ingresso $u_2(t)$.

$$\Rightarrow \dot{x}_2(t) = t\,x_2(t) + u_2(t)$$

Se il sistema è lineare, allora $x(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$ è soluzione di (2) con condizione iniziale $x(t_0) = a\,x_{1,0} + b\,x_{2,0}$ e ingresso $u(t) = a\,u_1(t) + b\,u_2(t)$, per ogni $t_0, x_{1,0}, x_{2,0}, u_1(\cdot), u_2(\cdot), a, b$.

- $x(t_0) = a\,x_1(t_0) + b\,x_2(t_0) = a\,x_{1,0} + b\,x_{2,0}$. verificata
- $\dot{x}(t) = a\,\dot{x}_1(t) + b\,\dot{x}_2(t) = a\left[t\,x_1(t) + u_1(t)\right] + b\left[t\,x_2(t) + u_2(t)\right] =$

$$= t\left[a\,x_1(t) + b\,x_2(t)\right] + \left[a\,u_1(t) + b\,u_2(t)\right] =$$

$$= t\,x(t) + u(t)$$ verificata

$\Rightarrow$ Dunque il sistema È lineare.