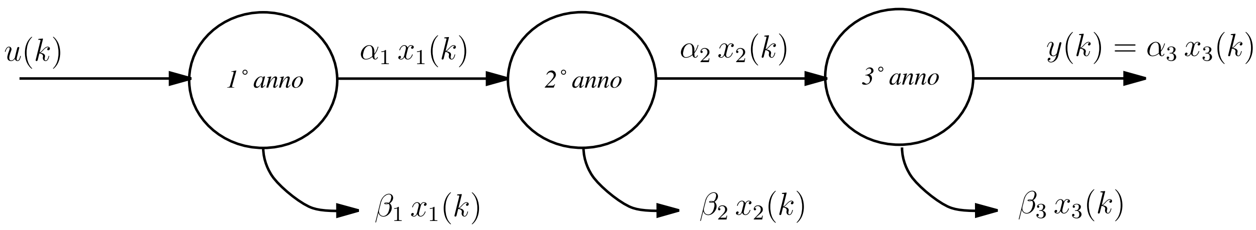
Esercizio di modellistica a tempo discreto

Si consideri un corso di laurea triennale, e si indichi con $k = 0, 1, 2, \ldots$ l'anno accademico dall'attivazione del corso. Si indichi con $x_i(k)$ il numero di studenti frequentanti l'i-esimo anno di corso, $i = 1, 2, 3$, durante l'anno accademico k. Sia $y(k)$ il numero di laureati nell'anno accademico k, e $u(k)$ il numero di nuovi iscritti al primo anno di corso nell'anno accademico successivo.

Sia α_i, $i = 1, 2$, la frazione di studenti che passa dall'i-esimo all'$(i+1)$-esimo anno di corso, e α_3 la frazione di laureati. Infine sia β_i, $i = 1, 2, 3$, la frazione di abbandoni durante l'i-esimo anno di corso.

1. *Scrivere un modello del sistema, evidenziandone gli ingressi, lo stato, e le uscite.*
2. *Posto $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{3}{4}$, $\alpha_3 = \dfrac{5}{6}$, $\beta_1 = \dfrac{1}{8}$, $\beta_2 = \dfrac{1}{12}$ e $\beta_3 = \dfrac{1}{24}$:*
   - *(a) Studiare la stabilità e i modi del sistema.*
   - *(b) Calcolare l'evoluzione del numero di laureati con condizioni iniziali $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 20$, $x_3(0) = 10$, e assumendo non ci siano nuovi iscritti.*
   - *(c) Quali modi sono eccitati dalle condizioni iniziali?*
   - *(d) Quali modi sono osservabili nell'uscita?*

Soluzioni. Il flusso di studenti tra i diversi anni di corso è illustrato dal seguente grafo:



dal quale si ricavano le equazioni del sistema:

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_1(k) - \alpha_1\, x_1(k) - \beta_1\, x_1(k) + u(k) \\
&= \underbrace{(1 - \alpha_1 - \beta_1)}_{\substack{\text{frazione di studenti}\\ \text{che rimangono}\\ \text{al } 1^o \text{ anno di corso}}} x_1(k) + u(k) \\
x_2(k+1) &= x_2(k) - \alpha_2\, x_2(k) - \beta_2\, x_2(k) + \alpha_1\, x_1(k) \\
&= \alpha_1\, x_1(k) + \underbrace{(1 - \alpha_2 - \beta_2)}_{\substack{\text{frazione di studenti}\\ \text{che rimangono}\\ \text{al } 2^o \text{ anno di corso}}} x_2(k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3(k+1) &= x_3(k) - \alpha_3\, x_3(k) - \beta_3\, x_3(k) + \alpha_2\, x_2(k) \\
&= \alpha_2\, x_2(k) + \underbrace{(1-\alpha_3-\beta_3)}_{\substack{\text{frazione di studenti}\\ \text{che rimangono}\\ \text{al } 3^o \text{ anno di corso}}} x_3(k) \\
y(k) &= \alpha_3\, x_3(k)
\end{aligned}
$$

Ricapitolando:

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= (1-\alpha_1-\beta_1)\, x_1(k) + u(k) \\
x_2(k+1) &= \alpha_1\, x_1(k) + (1-\alpha_2-\beta_2)\, x_2(k) \\
x_3(k+1) &= \alpha_2\, x_2(k) + (1-\alpha_3-\beta_3)\, x_3(k) \\
y(k) &= \alpha_3\, x_3(k)
\end{aligned}
$$

che sono le equazioni di un sistema lineare stazionario a tempo discreto in forma di spazio di stato. L'ingresso è $u(k)$, l'uscita è $y(k)$, mentre lo stato è $\mathrm{x}(k) = [\ x_1(k) \quad x_2(k) \quad x_3(k)\ ]'$. Per scrivere il sistema nella forma matriciale

$$
\begin{aligned}
\mathrm{x}(k+1) &= A\,\mathrm{x}(k) + B\,u(k) \\
y(k) &= C\,\mathrm{x}(k) + D\,u(k)
\end{aligned}
$$

osserviamo che:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\alpha_1-\beta_1)\, x_1(k) + u(k) \\ \alpha_1\, x_1(k) + (1-\alpha_2-\beta_2)\, x_2(k) \\ \alpha_2\, x_2(k) + (1-\alpha_3-\beta_3)\, x_3(k) \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\alpha_1-\beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1-\alpha_2-\beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1-\alpha_3-\beta_3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(k) \\
&= A\,\mathrm{x}(k) + B\,u(k) \\
y(k) &= \alpha_3\, x_3(k) \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u(k) \\
&= C\,\mathrm{x}(k) + D\,u(k)
\end{aligned}
$$

Posto $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{3}{4}$, $\alpha_3 = \dfrac{5}{6}$, $\beta_1 = \dfrac{1}{8}$, $\beta_2 = \dfrac{1}{12}$ e $\beta_3 = \dfrac{1}{24}$, le matrici A e C del sistema diventano

$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha_1-\beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1-\alpha_2-\beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1-\alpha_3-\beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

<u>*Calcolo degli autovalori di A*</u>

La matrice A è in forma triangolare inferiore. Dunque, i suoi autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale:

- $\lambda_1 = \dfrac{1}{6}$ con molteplicità algebrica $\mu_1 = 1$
- $\lambda_2 = \dfrac{1}{8}$ con molteplicità algebrica $\mu_2 = 2$

<u>*Stabilità*</u>

Dato che $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$, il sistema è *asontoticamente stabile*.

<u>*Modi del sistema*</u>

- per λ_1:

  $0 < \nu_1 \leq \mu_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_1 = \mu_1 = 1$

- per λ_2:

  $$A - \lambda_2\, I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{rango}(A - \lambda_2\, I) = 2 \quad \text{(perché ci sono due righe lin. indip.)}$$

  $$\nu_2 = \dim(\ker(A - \lambda_2\, I)) = n - \text{rango}(A - \lambda_2\, I) = 3 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_2 = 1 < 2 = \mu_2$$

La matrice A non è dunque diagonalizzabile, ma solo jordanizzabile. Dalla teoria si conosce l'esistenza di una matrice T non singolare (che non è ancora necessario calcolare) tale che

$$\tilde{A} = T^{-1}\, A\, T = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right]$$

e quindi

$$\tilde{A}^k = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2^k & k\lambda_2^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{8}\right)^k & k\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{8}\right)^k \end{bmatrix}$$

I modi del sistema sono $\left(\frac{1}{6}\right)^k$, $\left(\frac{1}{8}\right)^k$ e $k\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}$.

Calcolo della risposta

Non essendoci nuovi iscritti, risulta $u(k) = 0\ \forall k$, e quindi la dinamica del sistema si riduce a quella di un sistema autonomo (cioè senza ingressi):

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(k+1) &= A\,\mathrm{x}(k) \\ y(k) &= C\,\mathrm{x}(k) \end{aligned}$$

L'evoluzione del numero di laureati coincide dunque con la *risposta libera* in $y(k)$ del sistema, data dall'espressione $y(k) = C\,A^k\,\mathrm{x}_0$. La condizione iniziale x_0 si ricava dai dati dell'esercizio, essendo

$$\mathrm{x}_0 = \mathrm{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ricordando che $A^k = T\,\tilde{A}^k\,T^{-1}$, abbiamo:

$$y(k) = (C\,T)\,\tilde{A}^k\,(\underbrace{T^{-1}\mathrm{x}_0}_{\mathrm{z}_0}) = (C\,T)\,\tilde{A}^k\,\mathrm{z}_0$$

Occorre calcolare la matrice non singolare T.

- Autovettore v_1 relativo a λ_1

  Dobbiamo determinare una soluzione non nulla v del sistema omogeneo $(A - \lambda_1\,I)\mathrm{v} = 0$. Essendo

$$A - \lambda_1\,I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{24} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

  si ha

$$\left.\begin{aligned} -\tfrac{1}{24}\,v_1 = 0 \\ \tfrac{3}{4}\,v_1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad v_1 = 0$$

$$\left.\frac{3}{4}\,v_2 - \frac{1}{24}\,v_3 = 0\right\} \qquad v_2 = \frac{1}{18}\,v_3$$

  Posto arbitrariamente $v_3 = 1$, risulta $v_2 = \frac{1}{18}$. Quindi,

$$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{18} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- <u>Autovettore v_2 relativo a λ_2</u>

  Dobbiamo determinare una soluzione non nulla v del sistema omogeneo $(A-\lambda_2\, I)\mathrm{v} = 0$. Essendo

$$A - \lambda_2\, I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

  si ha

$$\begin{array}{rll} 0 = 0 & \} & \text{sempre verificata} \\ \dfrac{3}{4}\, v_1 + \dfrac{1}{24}\, v_2 = 0 & \Big\} & v_1 = -\dfrac{1}{18}\, v_2 = 0 \\ \dfrac{3}{4}\, v_2 = 0 & \Big\} & v_2 = 0 \end{array}$$

  Posto arbitrariamente $v_3 = 1$ (il sistema è in tre incognite, anche se v_3 non compare nelle equazioni), abbiamo

$$\mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- <u>Autovettore generalizzato v_3 relativo a λ_2</u>

  Dobbiamo determinare una soluzione v del sistema non omogeneo $(A - \lambda_2\, I)\mathrm{v} = \mathrm{v}_2$. Si ha

$$\begin{array}{rll} 0 = 0 & \} & \text{sempre verificata} \\ \dfrac{3}{4}\, v_1 + \dfrac{1}{24}\, v_2 = 0 & \Big\} & v_1 = -\dfrac{1}{18}\, v_2 = -\dfrac{2}{27} \\ \dfrac{3}{4}\, v_2 = 1 & \Big\} & v_2 = \dfrac{4}{3} \end{array}$$

  Posto arbitrariamente $v_3 = 0$ (il sistema è in tre incognite, anche se v_3 non compare nelle equazioni), abbiamo

$$\mathrm{v}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{27} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice T si costruisce nel seguente modo:

$$T = \left[\ \mathrm{v}_1 \ \middle|\ \mathrm{v}_2 \quad \mathrm{v}_3\ \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{27} \\ \frac{1}{18} & 0 & \frac{4}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per evitare di invertire T, il vettore $\mathrm{z}_0 = T^{-1}\mathrm{x}_0$ si ricava risolvendo il sistema lineare $T\,\mathrm{z}_0 = \mathrm{x}_0$. Si ha

$$
\begin{array}{rl}
-\dfrac{2}{27}\,z_3 = 0 \quad \Big\} & \qquad z_3 = 0 \\
\dfrac{1}{18}\,z_1 + \dfrac{4}{3}\,z_3 = 20 \quad \Big\} & \qquad z_1 = 360 \\
z_1 + z_2 = 10 \quad \} & \qquad z_2 = 10 - z_1 = -350
\end{array}
$$

Quindi,

$$
\mathrm{z}_0 = \begin{bmatrix} 360 \\ -350 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Ritornando al calcolo di $y(k)$:

$$
\begin{aligned}
y(k) &= (C\,T)\,\tilde{A}^k\,\mathrm{z}_0 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^k & 0 & * \\ 0 & \left(\frac{1}{8}\right)^k & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 360 \\ -350 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 360\,\left(\frac{1}{6}\right)^k \\ -350\,\left(\frac{1}{8}\right)^k \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= 300\,\left(\frac{1}{6}\right)^k - \frac{875}{3}\,\left(\frac{1}{8}\right)^k
\end{aligned}
$$

Sono stati indicati con $*$ alcuni elementi non necessari per il calcolo, viste le strutture di C e z_0.

Modi eccitati da x_0

Dall'espressione dell'evoluzione libera dello stato si ottiene

$$
\begin{aligned}
\mathrm{x}(k) &= A^k\,\mathrm{x}_0 = T\,\tilde{A}^k\,T^{-1}\,\mathrm{x}_0 = T\,\tilde{A}^k\,\mathrm{z}_0 \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & k\lambda_2^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \\
&= z_1\,\lambda_1^k\,\mathrm{v}_1 + (z_2\,\lambda_2^k + z_3\,k\lambda_2^{k-1})\,\mathrm{v}_2 + z_3\,\lambda_2^k\,\mathrm{v}_3
\end{aligned}
$$

Nel caso della x_0 considerata, risulta $z_1 = 360 \neq 0$, $z_2 = -350 \neq 0$ e $z_3 = 0$. Dunque

$$
\mathrm{x}(k) = z_1\,\lambda_1^k\,\mathrm{v}_1 + z_2\,\lambda_2^k\,\mathrm{v}_2 = 360\,\left(\frac{1}{6}\right)^k - 350\,\left(\frac{1}{8}\right)^k
$$

I modi $\left(\frac{1}{6}\right)^k$ e $\left(\frac{1}{8}\right)^k$ sono eccitati da x_0. Il modo $k\,\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}$ non è eccitato da x_0.

Modi osservabili nell'uscita

Dall'espressione dell'uscita si ottiene

$$\begin{aligned} y(k) &= C\,\mathrm{x}(k) \\ &= C\,[z_1\,\lambda_1^k\,\mathrm{v}_1 + (z_2\,\lambda_2^k + z_3\,k\lambda_2^{k-1})\,\mathrm{v}_2 + z_3\,\lambda_2^k\,\mathrm{v}_3] \\ &= z_1\,\lambda_1^k\,C\,\mathrm{v}_1 + (z_2\,\lambda_2^k + z_3\,k\lambda_2^{k-1})\,C\,\mathrm{v}_2 + z_3\,\lambda_2^k\,C\,\mathrm{v}_3 \end{aligned}$$

Nel caso del sistema considerato risulta $C\,\mathrm{v}_1 = \frac{5}{6} \neq 0$, $C\,\mathrm{v}_2 = \frac{5}{6} \neq 0$ e $C\,\mathrm{v}_3 = 0$. Dunque

$$\begin{aligned} y(k) &= z_1\,\lambda_1^k\,C\,\mathrm{v}_1 + (z_2\,\lambda_2^k + z_3\,k\lambda_2^{k-1})\,C\,\mathrm{v}_2 \\ &= \frac{5}{6}\left[z_1\,\left(\frac{1}{6}\right)^k + z_2\,\left(\frac{1}{8}\right)^k + z_3\,k\,\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}\right] \end{aligned}$$

e tutti i modi del sistema sono osservabili nell'uscita al variare dei coefficienti z_1, z_2 e z_3.

Nota. Nel caso della condizione iniziale x_0 considerata, risulta $z_3 = 0$, ed il modo $k\,\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}$ non compare nell'espressione dell'uscita. Tuttavia, il modo compare nell'espressione dell'uscita se si sceglie una differente condizione iniziale x_0 per la quale risulti $z_3 \neq 0$, ed è quindi osservabile.