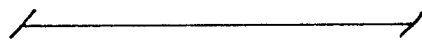


Dato il sistema nonlineare a tempo continuo

$$\dot{x}_1(t) = 1 + x_1^2(t) + \sin(x_2(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + \sin(x_1(t)) - u(t)$$

- 1) si calcolino i punti di equilibrio del sistema per ingresso costante $u(t) = 3\pi \forall t$
- 2) scrivere le equazioni del sistema linearizzato nell'intorno di ciascun punto di equilibrio
- 3) studiare la stabilità dei punti di equilibrio



Definendo lo stato

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$e \quad f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + x_1^2 + \sin(x_2) \\ 2x_2 + \sin(x_1) - u \end{bmatrix},$$

il sistema è nella forma $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.

- 1) Posto $u(t) = u_{eq} = 3\pi \forall t$, risolviamo $f(x, u_e) = 0$ per calcolare i punti di equilibrio del sistema.

$$\begin{cases} 1 + x_1^2 + \sin(x_2) = 0 \\ 2x_2 + \sin(x_1) - 3\pi = 0 \end{cases}$$

Consideriamo la prima equazione:

$$1 + x_1^2 + \sin(x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{1 + x_1^2}_{\geq 1} = - \underbrace{\sin(x_2)}_{\in [-1, 1]}$$

Si può avere uguaglianza solo se:

$$\begin{cases} 1 + x_1^2 = 1 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ \sin(x_2) = -1 & \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Consideriamo ora la seconda equazione:

$$2x_2 + \sin(x_1) - 3\pi = 0$$

Sostituendo in essa le possibili soluzioni della prima otteniamo:

$$2\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) - 3\pi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\pi + 2k\pi = \frac{3}{2}\pi$$

che è verificata per $k=0$.

Quindi il sistema ha un unico punto di equilibrio:

$$x_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}\pi \end{bmatrix}$$

ATTENZIONE! Qui k può essere solo intero ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

2) Il sistema linearizzato nell'intorno di (x_{eq}, u_{eq}) ha equazione

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_{lin} \tilde{x}(t) + B_{lin} \tilde{u}(t)$$

dove $\tilde{x}(t) = x(t) - x_{eq}$, $\tilde{u}(t) = u(t) - u_{eq}$, $A_{lin} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}}$, $B_{lin} = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & \cos(x_2) \\ \cos(x_1) & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{abbiamo sostituito } x_1=0 \text{ e } x_2=\frac{3}{2}\pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B_{lin} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3) Per studiare la stabilità del punto di equilibrio, applichiamo il metodo indiretto di Lyapunov.

3

$$A_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matrice in forma triangolare inferiore}$$

$\Rightarrow$ i suoi autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$

Dato che A_{lin} ha un autovalore positivo, concludiamo che il punto di equilibrio (x_{eq}, u_{eq}) è INSTABILE