Esercizio

Dato il sistema nonlineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[\,\ln(x_2(t)) - 1] + e^{u(t)} - 1 \\ \dot{x}_2(t) = (1-e)\,x_1(t) + [x_2(t) - 1][x_2(t) - \dfrac{1}{2}\,u^2(t) + \alpha] \end{cases}$$

nel quale α è un parametro reale:

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = 0$, $\forall t$.

2. Discutere la stabilità di almeno due punti di equilibrio al variare del parametro α.

Soluzione

<u>*Domanda 1.*</u>

Il sistema è nella forma

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = f(\mathrm{x}(t), u(t))$$

dove

$$\mathrm{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad f(\mathrm{x}, u) = \begin{bmatrix} x_1[\,\ln(x_2) - 1] + e^u - 1 \\ (1-e)\,x_1 + (x_2 - 1)(x_2 - \dfrac{1}{2}\,u^2 + \alpha) \end{bmatrix}$$

Si osservi innanzi tutto che, affinché il logaritmo sia definito, deve risultare $x_2 > 0$. Per determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = 0$, si risolve il sistema

$$0 = f(\mathrm{x}, u)$$

cioè

$$\begin{cases} 0 = x_1[\,\ln(x_2) - 1] + e^u - 1 \\ 0 = (1-e)\,x_1 + (x_2 - 1)(x_2 - \dfrac{1}{2}\,u^2 + \alpha) \end{cases}$$

con $u \triangleq u_{eq} = 0$. Si ha dunque

$$\begin{cases} x_1[\,\ln(x_2) - 1] = 0 \\ (e-1)x_1 = (x_2 - 1)(x_2 + \alpha) \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni $x_1 = 0$ e $x_2 = e$.

$\boxed{x_1 = 0}$

Sostituendo $x_1 = 0$ nella seconda equazione, si ha

$$(x_2 - 1)(x_2 + \alpha) = 0$$

che ha soluzioni $x_2 = 1$ e $x_2 = -\alpha$. Dato che deve essere $x_2 > 0$ affinché il logaritmo sia definito, la seconda soluzione esiste per $\alpha < 0$. I punti

$$\mathrm{x}_{eq,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{x}_{eq,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

sono dunque punti di equilibrio del sistema.

$\boxed{x_2 = e}$

Sostituendo $x_2 = e$ nella seconda equazione, si ha

$$(e-1)x_1 = (e-1)(e+\alpha)$$

che ha soluzione $x_1 = e + \alpha$. Il punto

$$\mathrm{x}_{eq,3} = \begin{bmatrix} e+\alpha \\ e \end{bmatrix}$$

è dunque un punto di equilibrio del sistema.

<u>Domanda 2.</u>

Calcoliamo la matrice jacobiana di f rispetto a x:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}, u) = \begin{bmatrix} \ln(x_2) - 1 & \dfrac{x_1}{x_2} \\ 1 - e & 2\,x_2 - \dfrac{1}{2}\,u^2 + \alpha - 1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo il punto di equilibrio $(\mathrm{x}_{eq,1}, u_{eq})$. Abbiamo:

$$A_{lin,1} = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}_{eq,1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1-e & 1+\alpha \end{bmatrix}$$

La matrice $A_{lin,1}$ è in forma triangolare inferiore, per cui i suoi autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale:

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = 1 + \alpha$$

- Se $\alpha < -1$, allora risulta $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, e si conclude che il punto di equilibrio è *asintoticamente stabile*.

- Se $\alpha > -1$, allora risulta $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$, e si conclude che il punto di equilibrio è *instabile*.

- Se $\alpha = -1$, allora risulta $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 = 0$, e applicando il metodo della linearizzazione non si può concludere nulla sulla stabilità del punto di equilibrio.

Consideriamo il punto di equilibrio $(\mathrm{x}_{eq,2}, u_{eq})$, con $\alpha < 0$. Abbiamo:

$$A_{lin,2} = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}_{eq,2}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} \ln(-\alpha) - 1 & 0 \\ 1 - e & -(1+\alpha) \end{bmatrix}$$

La matrice $A_{lin,2}$ è in forma triangolare inferiore, per cui i suoi autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale:

$$\lambda_1 = \ln(-\alpha) - 1$$
$$\lambda_2 = -(1+\alpha)$$

- Se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, si può concludere che il punto di equilibrio è *asintoticamente stabile*. Ciò si verifica per valori di α tali che

  $$\ln(-\alpha) - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(-\alpha) < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < -\alpha < e \quad \Rightarrow \quad -e < \alpha < 0$$
  $$-(1+\alpha) < 0 \quad \Rightarrow \quad 1+\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha > -1$$

  Entrambe le condizioni sono verificate per $-1 < \alpha < 0$.

- Se $\alpha < -1$, allora risulta $\lambda_2 > 0$, e si conclude che il punto di equilibrio è *instabile*.

- Se $\alpha = -1$, allora risulta $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 = 0$, e applicando il metodo della linearizzazione non si può concludere nulla sulla stabilità del punto di equilibrio.