ESERCIZIO

Dato il sistema nonlineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u^2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + u x_2 \end{cases}$$

1. determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t)=1 \ \forall t$
2. calcolare le matrici dei sistemi linearizzati nell'intorno dei punti di equilibrio
3. studiare la stabilità dei punti di equilibrio

Definendo lo stato $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, il sistema è nella forma:

$$\dot{x} = f(x,u)$$

dove $f(x,u) = \begin{bmatrix} x_2 + u^2 \\ x_1^2 + u x_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightsquigarrow f_1(x,u) \\ \rightsquigarrow f_2(x,u) \end{matrix}$

Per determinare i punti di equilibrio del sistema, si risolve:

$$f(x,u) = 0 \qquad \text{(\underline{NOTA}- siamo a tempo continuo...)}$$

con $u = u_{eq} = 1$.

$$\begin{cases} x_2 + u^2 = 0 \\ x_1^2 + u x_2 = 0 \end{cases} \underset{u = u_{eq} = 1}{\Longrightarrow} \begin{cases} x_2 + 1 = 0 \\ x_1^2 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^2 = -x_2 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono:

$$x_{eq,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x_{eq,2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Per calcolare le matrici dei sistemi linearizzati nell'intorno dei punti di equilibrio, occorre prima calcolare le matrici jacobiane di f rispetto a X e u:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x_1 & u \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u \\ x_2 \end{bmatrix}$$

MATRICI DEL SISTEMA LINEARIZZATO NELL'INTORNO DI $(X_{eq,1}, u_{eq})$

$$A_{lin,1} = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\substack{X=X_{eq,1} \\ u=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{lin,1} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{X=X_{eq,1} \\ u=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

MATRICI DEL SISTEMA LINEARIZZATO NELL'INTORNO DI $(X_{eq,2}, u_{eq})$

$$A_{lin,2} = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\substack{X=X_{eq,2} \\ u=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{lin,2} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{X=X_{eq,2} \\ u=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Per studiare la stabilità dei punti di equilibrio, applichiamo il metodo indiretto di Lyapunov, e quindi calcoliamo gli autovalori di $A_{lin,1}$ e $A_{lin,2}$ ...

$$p_1(\lambda) = \det(\lambda I - A_{lin,1}) = \lambda(\lambda-1) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

=> in $p_1(\lambda)$ ci sono alternanze di segno, e quindi $p_1(\lambda)$ ha almeno una radice con parte reale positiva

↳ dunque possiamo concludere che $(x_{eq,1}, u_{eq})$ è un punto di equilibrio INSTABILE.

$$p_2(\lambda) = \det(\lambda I - A_{lin,2}) = \lambda(\lambda-1) + 2 = \lambda^2 - \lambda + 2$$

=> in $p_2(\lambda)$ ci sono alternanze di segno, e quindi $p_2(\lambda)$ ha almeno una radice con parte reale positiva.

↳ dunque possiamo concludere che $(x_{eq,2}, u_{eq})$ è un punto di equilibrio INSTABILE.