

Esercizio

1

Calcolare e^{At} e A^k per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Calcolo degli autovalori

Partizionando la matrice A come segue:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & \\ -3 & 2 & 2 & \\ \hline 0 & 0 & 2 & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right]$$

riconosciamo una struttura triangolare superiore a blocchi, per cui gli autovalori di A coincidono con quelli di A_1 e A_2

$$A_1 = \left[\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline -3 & 2 \end{array} \right] \text{ struttura triangolare inferiore } \Rightarrow \text{autovalori: } -1, 2$$

$$A_2 = [2] \text{ blocchetto scalare } \Rightarrow \text{autovalore: } 2$$

autovalori di A :

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{con } m_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2 \quad \text{con } m_2 = 2$$

2. Calcolo delle molteplicità geometriche

- per λ_1 :

$$0 < v_1 \leq m_1 = 1 \Rightarrow v_1 = 1$$

- per λ_2 :

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{riga 1} \longleftarrow -\frac{1}{3} \text{ riga 1}$$

$$\text{riga 2} \longleftarrow -\text{riga 2} + \text{riga 1}$$

Dalla riduzione a scala, osserviamo che $\text{rango}(A - \lambda_2 I) = 2$.

(2)

Quindi:

$$V_2 = \dim(\ker(A - \lambda_2 I)) = 3 - \text{rango}(A - \lambda_2 I) = 1.$$

$\downarrow$
 $n=3$ dimensione di A

3. Confronto delle molteplicità

$$\mu_1 = 1 = \nu_1$$

$$\mu_2 = 2 > 1 = \nu_2$$

Quindi, la matrice A non è diagonalizzabile.

Siamo nel caso particolare di matrice jordanizzabile analizzato.

4. Calcolo degli autovettori

• per λ_1 :

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

scambio riga 1 e riga 2

$$\text{riga 1} \leftarrow -\frac{1}{3} \text{ riga 1}$$

$$\text{riga 2} \leftarrow \frac{1}{3} \text{ riga 2}$$

$$\text{riga 3} \leftarrow \text{riga 3} - \text{riga 2}$$

Sistema omogeneo:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Posto $x_2 = \alpha$:

$$x_3 = 0$$

$$x_1 = x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \alpha$$

Dunque l'autospazio $V_1 = \ker(A - \lambda_1 I)$ è dato da:

$$V_1 = \left\{ v = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow V_1$$

- per λ_2 :

Riprendiamo la riduzione a scala di $A - \lambda_2 I$ fatta in precedenza.

$$\text{sistema omogeneo: } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Posto $x_2 = \alpha$:

$$x_3 = 0$$

$$x_1 = x_3 = 0$$

Dunque l'autospazio $V_2 = \ker(A - \lambda_2 I)$ è dato da:

$$V_2 = \left\{ v = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$\downarrow$
 v_2

Dobbiamo calcolare ora l'autovettore generalizzato v_3 tale che:

$$(A - \lambda_2 I)v_3 = v_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\text{Riga 1} \leftarrow -\frac{1}{3} \text{Riga 1} \\ \text{Riga 2} \leftarrow -\text{Riga 2} + \text{Riga 1}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{A - \lambda_2 I} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{v_2}$

$$\text{sistema: } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Posto $x_2 = \alpha$:

$$x_3 = -1$$

$$x_1 = x_3 = -1$$

In particolare, per $\alpha = 0$ (arbitrario, ma comodo!):

$$v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. Costruzione di T

$$T = [v_1 | v_2 | v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Matrice $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

NOTA- Si ricordi che $\tilde{A} = T^{-1}AT$ può essere scritta senza calcolare T^{-1} ...

7. Matrici $e^{\tilde{A}t}$ e $\tilde{A}^k$

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t} t \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & e^{2t} t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \lambda_2^{k-1} k \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 2^{k-1} k \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

8. Calcolo di T^{-1}

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \text{Agg}(T) = \frac{1}{(-1)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

9. Matrici e^{At} e A^k

$$e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1} = \dots = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & -e^{-t} + e^{2t} \\ e^{-t} - e^{2t} & e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t}(1-t) \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

(5)

$$A^k = T \tilde{A}^k T^{-1} = \dots = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 & -(-1)^k + 2^k \\ (-1)^k - 2^k & 2^k & -(-1)^k + 2^{k-1}(2-k) \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$$