

Esercizio

Calcolare e^{At} e A^k per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Calcolo del polinomio caratteristico di A

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 & 1 \\ -2 & 2 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$= (\lambda - 3) \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & \lambda - 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - 3) [\lambda(\lambda - 1) - 2] - (-\lambda + 2) + [-2 + 2(\lambda - 1)]$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda^2 - \lambda - 2) + (\lambda - 2) + (2\lambda - 4)$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda - 3\lambda^2 + 3\lambda + 6 + \lambda - 2 + 2\lambda - 4$$

$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

$$= \lambda(\lambda - 2)^2$$

2. Calcolo degli autovalori

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 2$$

3. Calcolo delle molteplicità algebriche

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = 2$$

4. Calcolo delle molteplicità geometriche• per λ_1 :

$$0 < \nu_1 \leq \mu_1 = 1 \Rightarrow \nu_1 = 1$$

• per λ_2 :

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{riduzione a scala di Gauss-Jordan}$$

$$\text{riga 2} \leftarrow \text{riga 2} - \text{riga 1}$$

$$\text{riga 3} \leftarrow \text{riga 3} - 2 \text{ riga 1}$$

Dalla riduzione a scala, osserviamo che $\text{rango}(A - \lambda_2 I) = 1$.

Quindi:

$$\nu_2 = \dim(\ker(A - \lambda_2 I)) = 3 - \text{rango}(A - \lambda_2 I) = 3 - 1 = 2$$

$\swarrow$
 $n = 3$ dimensione di A

Riassumendo:

$$\nu_1 = 1$$

$$\nu_2 = 2$$

5. Confronto delle molteplicità

$$\mu_1 = 1 = \nu_1$$

$$\mu_2 = 2 = \nu_2$$

Quindi, per entrambi gli autovalori, molteplicità algebrica e geometrica coincidono $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile

~~~~~  
 Dato che  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  e  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ , siamo nel caso di matrice diagonalizzabile con tutti autovalori reali.

## 6. Calcolo degli autovettori

3

• per  $\lambda_1$ :

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

scambio riga 1 e riga 2

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{riga 2} \leftarrow \text{riga 2} - 3 \text{ riga 1} \quad \text{riga 2} \leftarrow -\frac{1}{2} \text{ riga 2}$$

$$\text{riga 3} \leftarrow \text{riga 3} - 2 \text{ riga 1} \quad \text{riga 3} \leftarrow \text{riga 3} - \text{riga 2}$$

sistema omogeneo: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Posto  $x_3 = \alpha$ :

$$x_2 = \frac{x_3}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

$$x_1 = -x_2 + x_3 = -\frac{\alpha}{2} + \alpha = \frac{\alpha}{2}$$

Dunque l'autospazio  $\mathcal{V}_1 = \ker(A - \lambda_1 I)$  è dato da

$$\mathcal{V}_1 = \left\{ v = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

Scegliendo  $\alpha = 2$ , il vettore

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ è una possibile base dell'autospazio } \mathcal{V}_1.$$

- per  $\lambda_2$ :

Riprendiamo la riduzione a scala di  $A - \lambda_2 I$  fatta in precedenza.

Sistema omogeneo:  $x_1 - x_2 - x_3 = 0$

Posto  $x_2 = \alpha$  e  $x_3 = \beta$ :

$$x_1 = x_2 + x_3 = \alpha + \beta$$

Dunque l'autospazio  $V_2 = \ker(A - \lambda_2 I)$  è dato da

$$V_2 = \left\{ v = \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

$\swarrow$   $v_2$                        $\swarrow$   $v_3$

I vettori  $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  costituiscono una possibile base dell'autospazio  $V_2$ .

### 7. Costruzione di T

$$T = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\swarrow$  base di  $V_1$                        $\swarrow$  base di  $V_2$

### 8. Matrice $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

NOTA - scritta senza aver dovuto calcolare  $T^{-1}$ ,  
ma applicando la teoria.

9. Matrici  $e^{\tilde{A}t}$  e  $\tilde{A}^k$

(5)

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

10. Calcolo di  $T^{-1}$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \text{Agg}(T) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \det(T) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

[Sviluppato rispetto alla terza colonna]

11. Matrici  $e^{At}$  e  $A^k$

$$e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1} = \dots = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-1+3e^{2t}) & \frac{1}{2}(1-e^{2t}) & \frac{1}{2}(1-e^{2t}) \\ \frac{1}{2}(-1+e^{2t}) & \frac{1}{2}(1+e^{2t}) & \frac{1}{2}(1-e^{2t}) \\ -1+e^{2t} & 1-e^{2t} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^k = T \tilde{A}^k T^{-1} = \dots = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-0^k+3 \cdot 2^k) & \frac{1}{2}(0^k-2^k) & \frac{1}{2}(0^k-2^k) \\ \frac{1}{2}(-0^k+2^k) & \frac{1}{2}(0^k+2^k) & \frac{1}{2}(0^k-2^k) \\ -0^k+2^k & 0^k-2^k & 0^k \end{bmatrix}$$

NOTA -  $0^k = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$