

Esercizio

①

Calcolare e^{At} e A^k per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1. Calcolo degli autovalori

Partizionando la matrice A come segue:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline A_3 & A_2 \end{array} \right]$$

riconosciamo una struttura triangolare inferiore a blocchi, perciò gli autovalori di A coincidono con gli autovalori di A_1 e A_2 .

$$p_{A_1}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4 \Rightarrow \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = \lambda_1^* = -2i$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{2} \right] \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{2} \quad (\text{blocchetto scalare})$$

Dato che la matrice A ha tre autovalori distinti, essa è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$, perché $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$).

$\Rightarrow$ Siamo nel caso di matrice diagonalizzabile con autovalori complessi.

2. Calcolo degli autovettori

- per λ_1 : (NOTA- consideriamo l'autovalore complesso con parte immaginaria positiva)

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -2i & 2 & 0 \\ -2 & -2i & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 2i \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 2i \end{bmatrix} \longrightarrow$$

(2)

$$\text{riga 1} \leftarrow \frac{1}{2} i \text{ riga 1}$$

$$\text{riga 2} \leftarrow -\frac{1}{2} \text{ riga 2}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + 2i & \frac{1}{2} - 2i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + 2i & \frac{1}{2} - 2i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\text{riga 2} \leftarrow \text{riga 2} - \text{riga 1}$$

$$\text{riga 3} \leftarrow \text{riga 3} + 2 \text{ riga 1}$$

scambio riga 2 e riga 3

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{riga 2} \leftarrow \frac{1}{-\frac{1}{2} + 2i} \text{ riga 2}$$

sistema omogeneo:
$$\begin{cases} x_1 + i x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Posto $x_3 = \alpha$:

$$x_2 = x_3 = \alpha$$

$$x_1 = -i x_2 = -i \alpha$$

Dunque l'autospazio $\mathcal{V}_1 = \ker(A - \lambda_1 I)$ è dato da

$$\mathcal{V}_1 = \left\{ v = \begin{bmatrix} -i\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

$\downarrow \mathcal{V}_1$

$$\mathcal{V}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \mathcal{V}_1^{(2)}$ parte immaginaria

$\downarrow \mathcal{V}_1^{(1)}$ parte reale

• per λ_3 :

(3)

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\text{riga 1} \leftarrow -2 \text{ riga 1}$$

$$\text{riga 3} \leftarrow \text{riga 3} - \text{riga 2}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{riga 2} \leftarrow \text{riga 2} + 2 \text{ riga 1}$$

$$\text{riga 2} \leftarrow -\frac{2}{17} \text{ riga 2}$$

sistema omogeneo: $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Posto $x_3 = \alpha$:

$$x_2 = 0$$

$$x_1 = 4x_2 = 0$$

Dunque l'autospazio $V_3 = \ker(A - \lambda_3 I)$ è dato da

$$V_3 = \left\{ v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

↓
 v_3

3. Costruzione di T

$$T = [v_1^{(1)} \ v_1^{(2)} \ v_3] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Matrice $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} \sigma_1 & \omega_1 & 0 \\ -\omega_1 & \sigma_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$\lambda_1 = 2i = \sigma_1 + i\omega_1$
 $\Rightarrow \sigma_1 = 0, \omega_1 = 2$

NOTA - $\tilde{A}$ è stata scritta senza calcolare T^{-1} , ma applicando i risultati noti dalla teoria.

5. Matrici $e^{\tilde{A}t}$ e $\tilde{A}^k$

$$e^{\tilde{A}t} = \left[\begin{array}{cc|c} e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t) & e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t) & 0 \\ -e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t) & e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t) & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} \cos(2t) & \sin(2t) & 0 \\ -\sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{array} \right]$$

$$\tilde{A}^k = \left[\begin{array}{cc|c} \rho_1^k \cos(k\theta_1) & \rho_1^k \sin(k\theta_1) & 0 \\ -\rho_1^k \sin(k\theta_1) & \rho_1^k \cos(k\theta_1) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3^k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 2^k \cos(k\frac{\pi}{2}) & 2^k \sin(k\frac{\pi}{2}) & 0 \\ -2^k \sin(k\frac{\pi}{2}) & 2^k \cos(k\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^k \end{array} \right]$$

6. Calcolo di T^{-1}

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \text{Agg}(T) = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$\hookrightarrow \det(T) = 1$

$$\rho_1 = \sqrt{\sigma_1^2 + \omega_1^2} = 2$$

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{\sigma_1}{\rho_1}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

7. Matrici e^{At} e A^k

$$e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1} = \dots = \left[\begin{array}{ccc} \cos(2t) & \sin(2t) & 0 \\ -\sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ -\sin(2t) & \cos(2t) - e^{\frac{1}{2}t} & e^{\frac{1}{2}t} \end{array} \right]$$

$$A^k = T \tilde{A}^k T^{-1} = \dots = \begin{bmatrix} 2^k \cos(k \frac{\pi}{2}) & 2^k \sin(k \frac{\pi}{2}) & 0 \\ -2^k \sin(k \frac{\pi}{2}) & 2^k \cos(k \frac{\pi}{2}) & 0 \\ -2^k \sin(k \frac{\pi}{2}) & 2^k \cos(k \frac{\pi}{2}) - (\frac{1}{2})^k & (\frac{1}{2})^k \end{bmatrix} \quad (5)$$