

ESERCIZIO

1

Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase della funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{(s-1)(s+10)}{s(s^2+s+16)}$$

1° passo

Verifichiamo se s^2+s+16 ha radici reali o complesse coniugate.

$$\Delta = 1 - 64 = -63 < 0 \Rightarrow \text{radici complesse coniugate}$$

$\Rightarrow s^2+s+16$ NON può essere scomposto nella forma $(s+a)(s+b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

2° passo

Portiamo $W(s)$ in forma di Bode.

$$W(s) = \frac{(-1)10}{16} \frac{(1-s)\left(1+\frac{s}{10}\right)}{s\left(1+\frac{s}{16}+\frac{s^2}{16}\right)} = \frac{k_b}{s} \cdot \frac{(1-\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

dove:

$$\bullet k_b = -\frac{5}{8}$$

$$\bullet \tau_1 = 1$$

$$\bullet \tau_2 = \frac{1}{10}$$

$$\bullet \omega_n^2 = 16 \Rightarrow \omega_n = 4$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{16} \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_n}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

3° passo

I punti di rottura del diagramma sono:

$$\bullet \frac{1}{\tau_1} = 1$$

$$\bullet \omega_n = 4$$

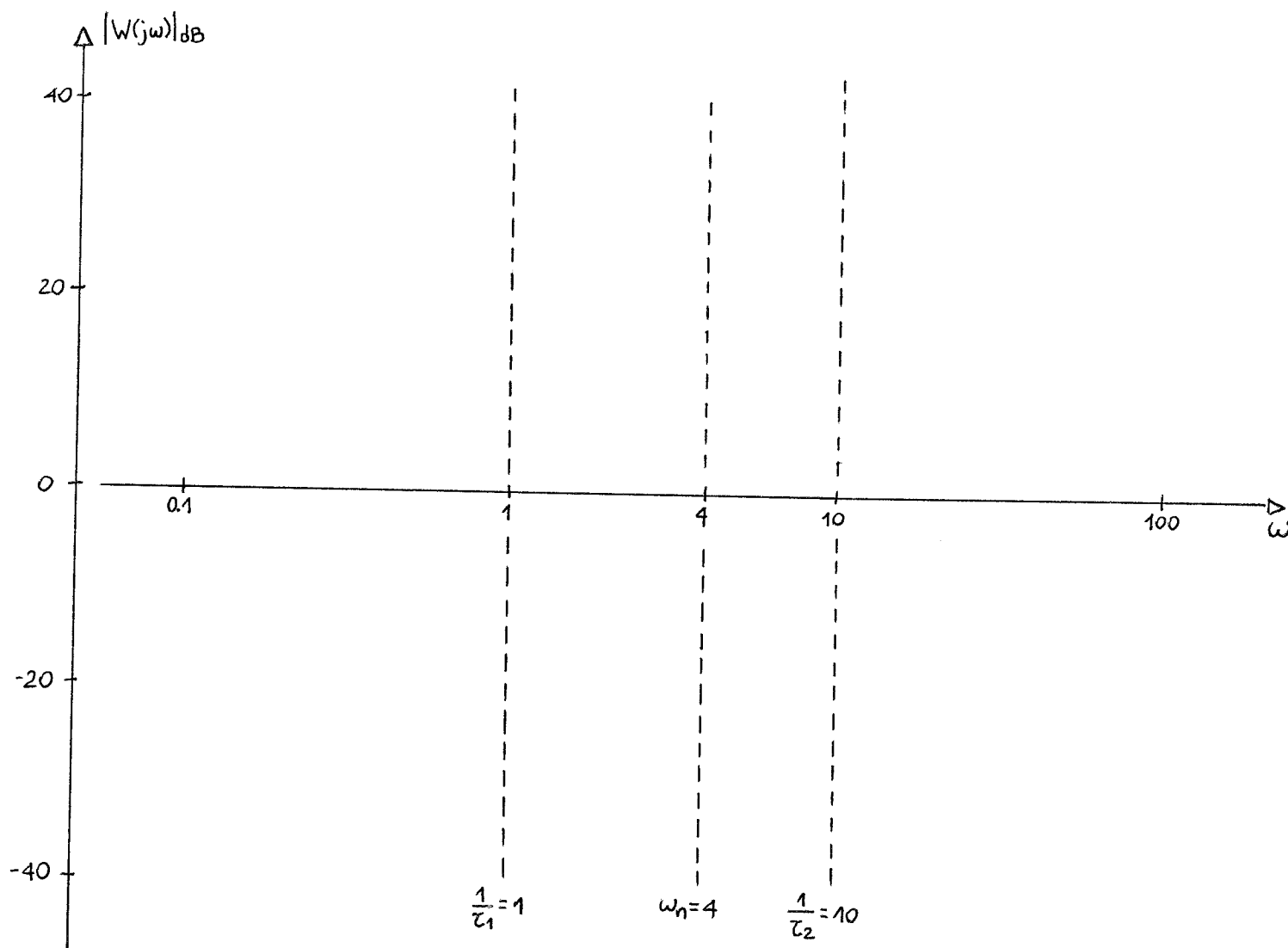
$$\bullet \frac{1}{\tau_2} = 10$$

~> TRACCIAMO IL DIAGRAMMA DI BODE DEL MODULO...

1. Dividiamo il diagramma in settori

②

I 3 punti di rottura dividono il diagramma in 4 settori...

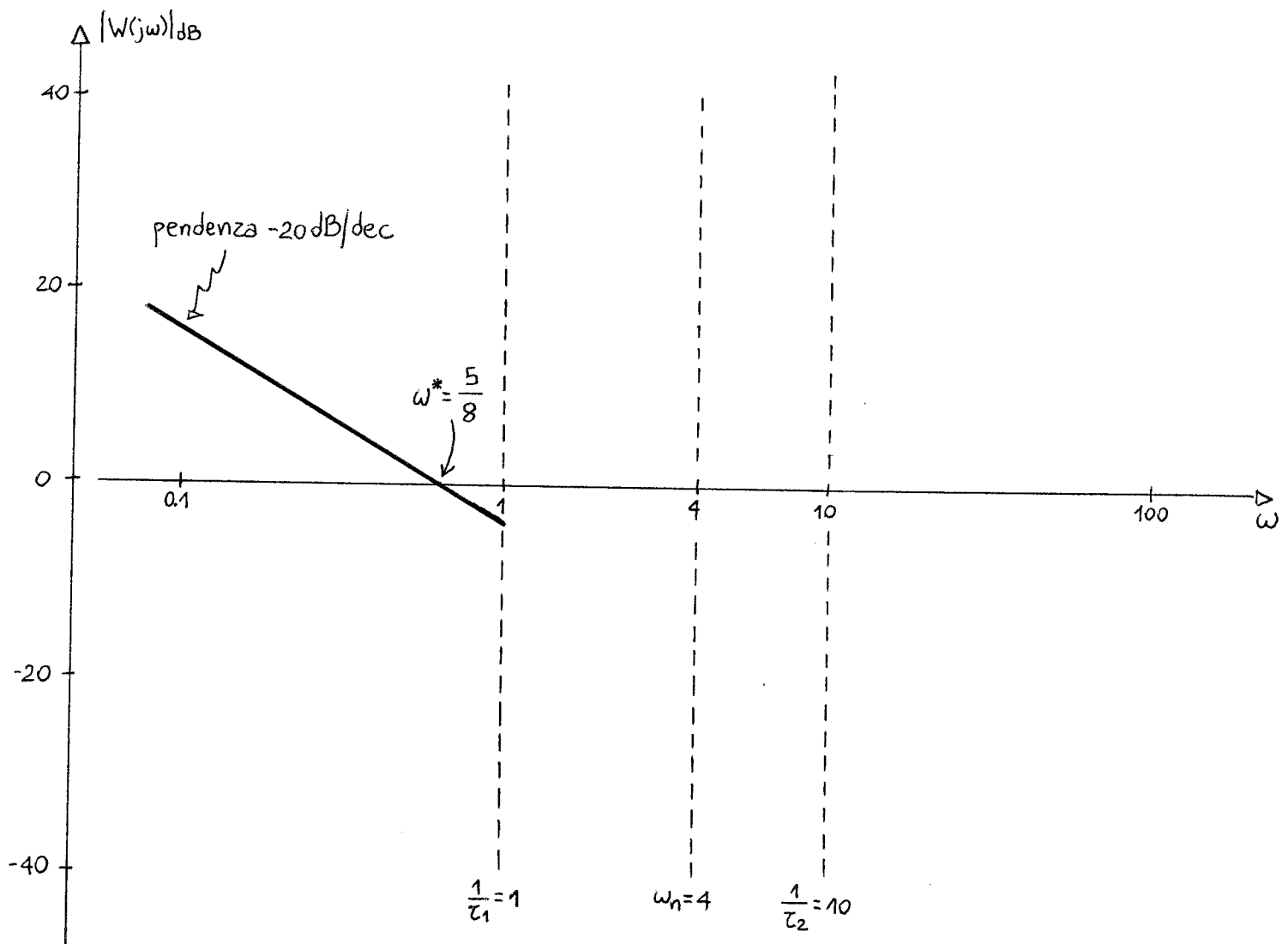


La regola è che ciascun termine in cui è stata scomposta la funzione di trasferimento $W(s)$ entra in gioco solo dopo il corrispondente punto di rottura, quando si traccia il diagramma asintotico...

2. Se $\omega < \frac{1}{\tau_1} = 1$, l'unico contributo è quello di $\frac{k_b}{s}$.

3

"Facciamo finta" che in questo settore la f.d.t. sia $W_1(s) = \frac{k_b}{s}$



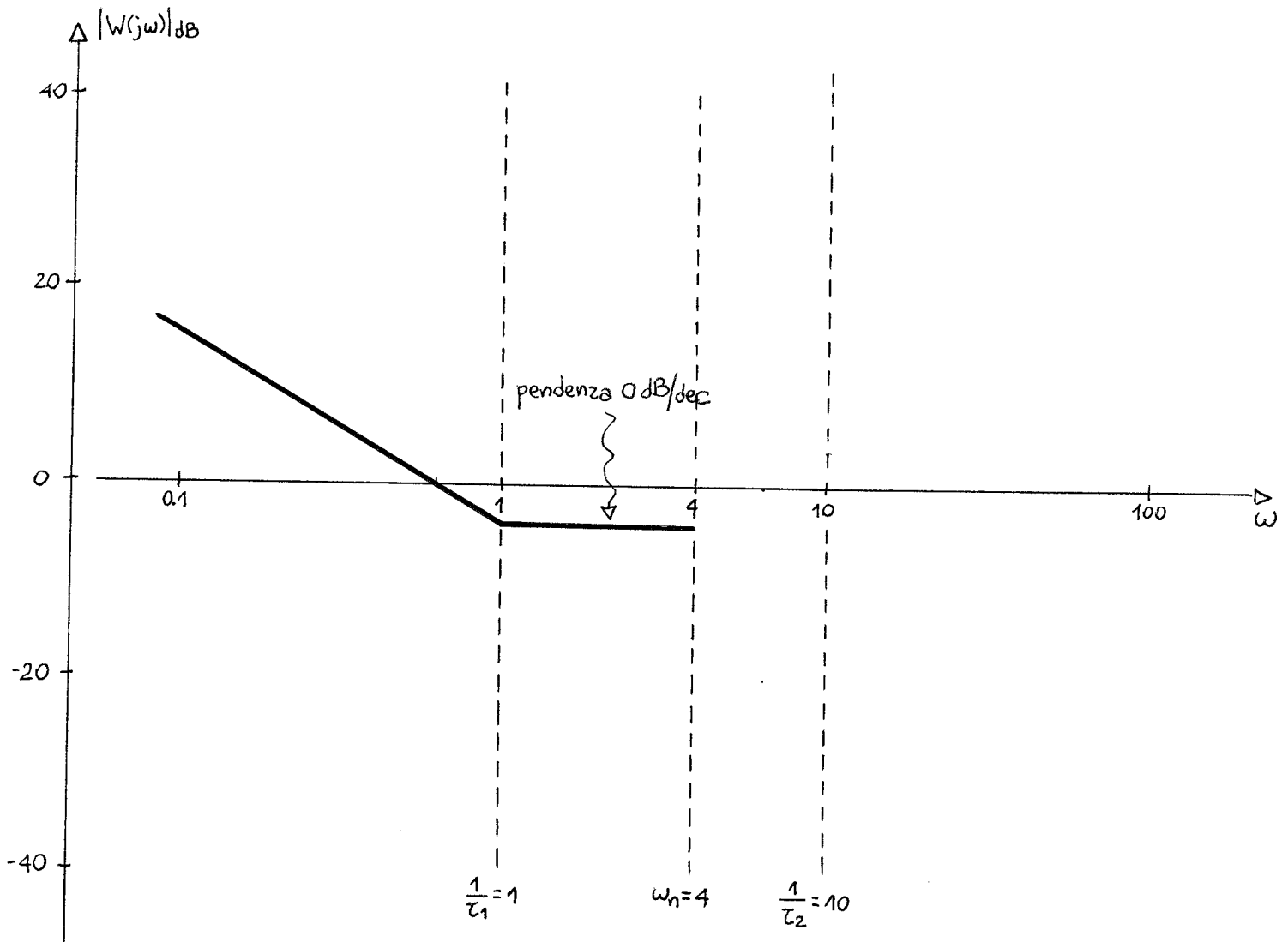
Il contributo al diagramma del termine $\frac{k_b}{s}$ è una retta con pendenza -20dB/dec , di cui dobbiamo determinare l'intersezione con l'asse delle ascisse.

$$\left| \frac{k_b}{s} \right|_{s=j\omega} = 1 \Rightarrow \frac{|k_b|}{\omega} = 1 \Rightarrow \omega^* = |k_b| = \frac{5}{8}$$

per poterla posizionare correttamente sul grafico...

3. Se $\frac{1}{\tau_1} \leq \omega < \omega_n$ ($1 \leq \omega < 4$), i contributi "attivi" sono quelli di $\frac{k_b}{s}$ e $(1-\tau_1 s)$. (4)

"Facciamo finta" che in questo settore la f.d.t. sia $W_2(s) = W_1(s) \cdot (1-\tau_1 s)$.



$$W_2(s) = \left(\frac{k_b}{s} \right) \cdot (1 - \tau_1 s)$$

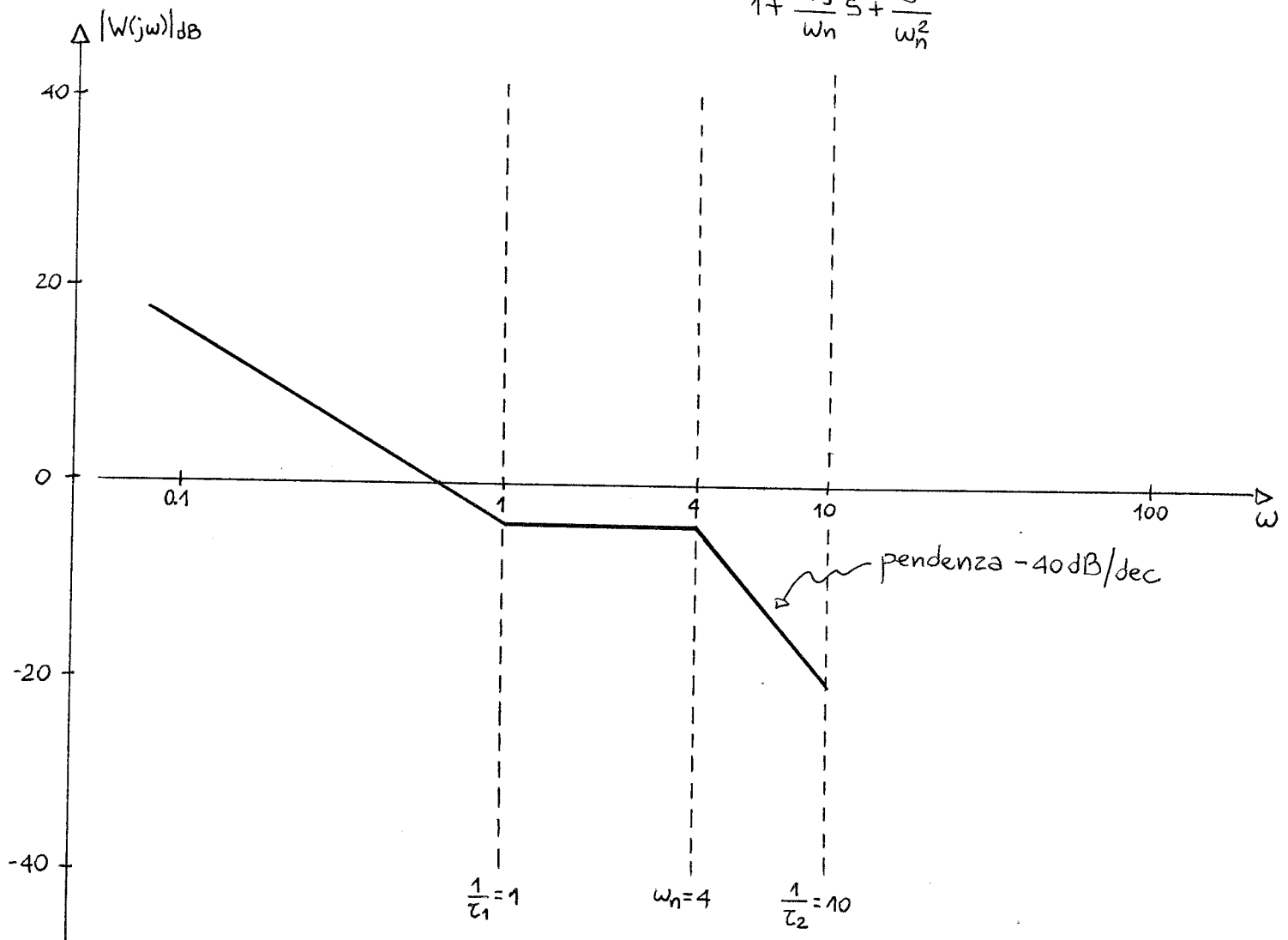
$\swarrow$ contributo -20 dB/dec $\searrow$ contributo +20 dB/dec

Il contributo complessivo è: $-20 + 20 = 0 \text{ dB/dec}$

4. Se $\omega_n \leq \omega < \frac{1}{\tau_2}$ ($4 \leq \omega < 10$), i contributi "attivi" sono quelli di $\frac{k_b}{s}$, $(1-\tau_1 s)$ (5)

e $\frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$. "Facciamo finta" che in questo settore la f.d.t. sia

$$W_3(s) = W_2(s) \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$



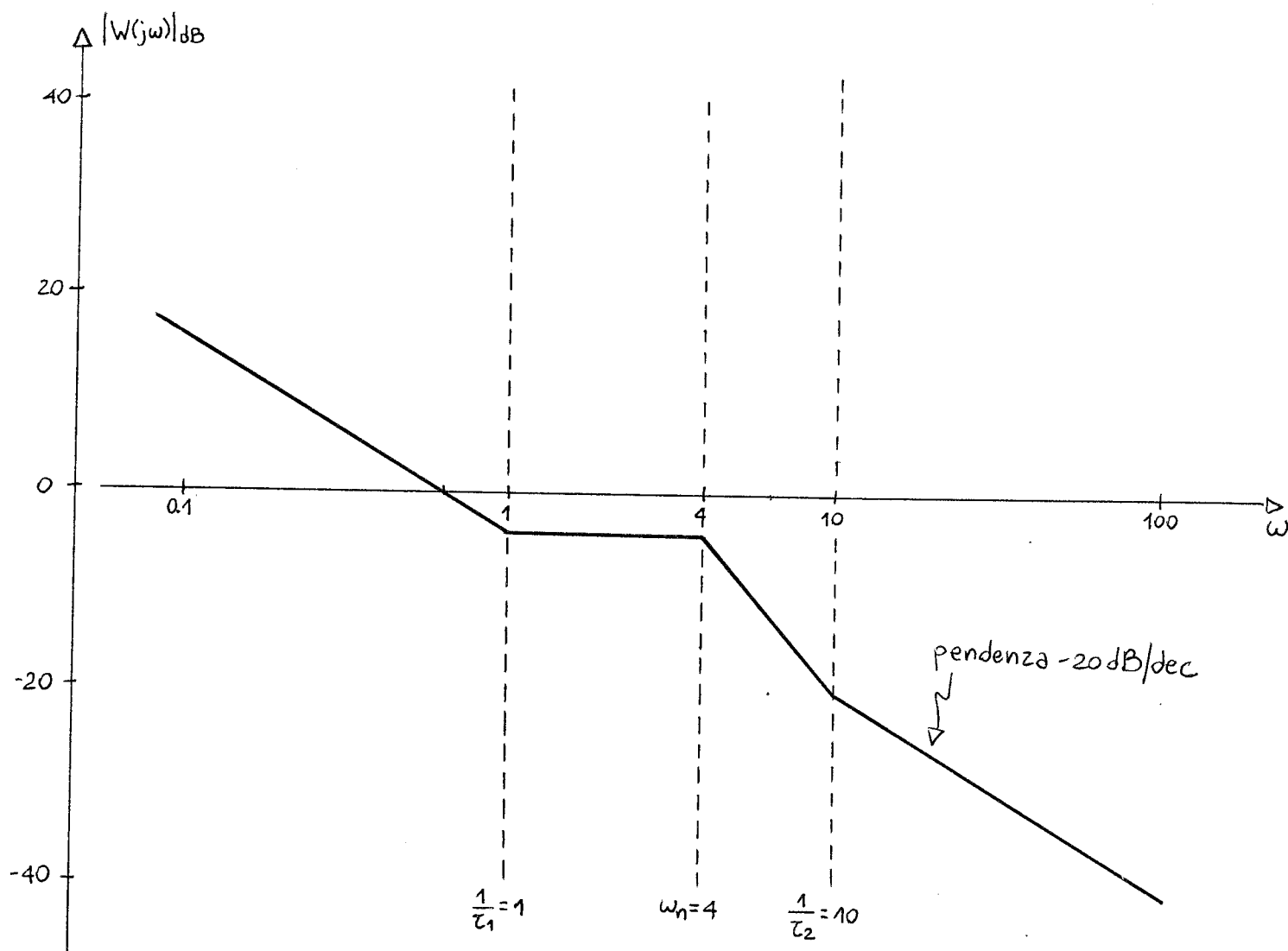
$$W_3(s) = \underbrace{\frac{k_b}{s}}_{\text{contributo } -20 \text{ dB/dec}} \cdot \underbrace{(1 - \tau_1 s)}_{\text{contributo } +20 \text{ dB/dec}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}}_{\text{contributo } -40 \text{ dB/dec}}$$

Il contributo complessivo è: $-20 + 20 - 40 = -40 \text{ dB/dec}$.

5. Se $\omega \geq \frac{1}{\tau_2} = 10$, tutti i termini danno contributo "attivo".

(6)

In questo settore la f.d.t. che consideriamo coincide con tutta $W(s)$.



$$W(s) = \underbrace{\frac{k_b}{s}}_{\text{contributo } -20 \text{ dB/dec}} \cdot \underbrace{(1 - \tau_1 s)}_{\text{contributo } +20 \text{ dB/dec}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}}_{\text{contributo } -40 \text{ dB/dec}} \cdot \underbrace{(1 + \tau_2 s)}_{\text{contributo } +20 \text{ dB/dec}}$$

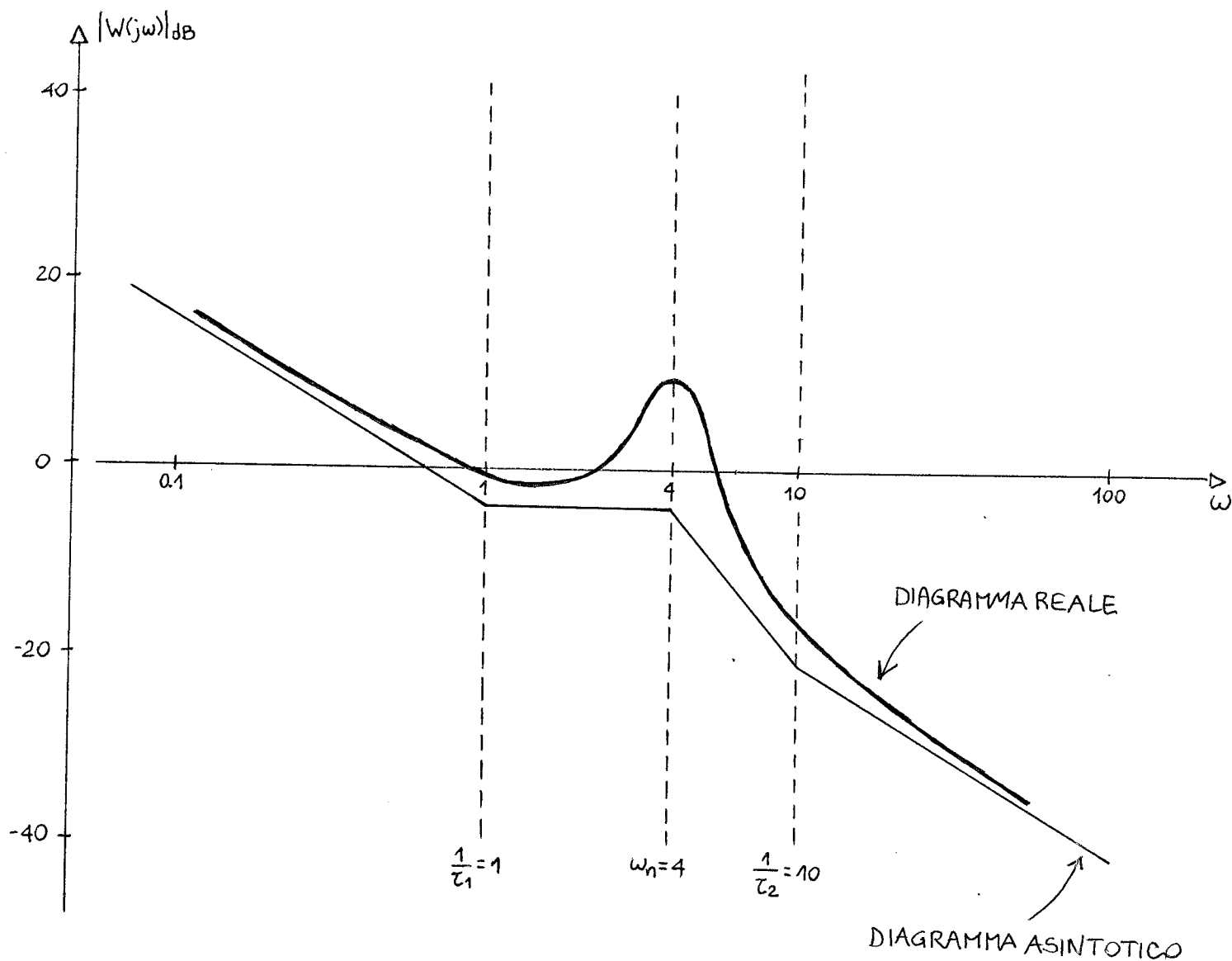
Il contributo complessivo è: $-20 + 20 - 40 + 20 = -20 \text{ dB/dec}$.

Abbiamo tracciato il DIAGRAMMA ASINTOTICO del modulo...

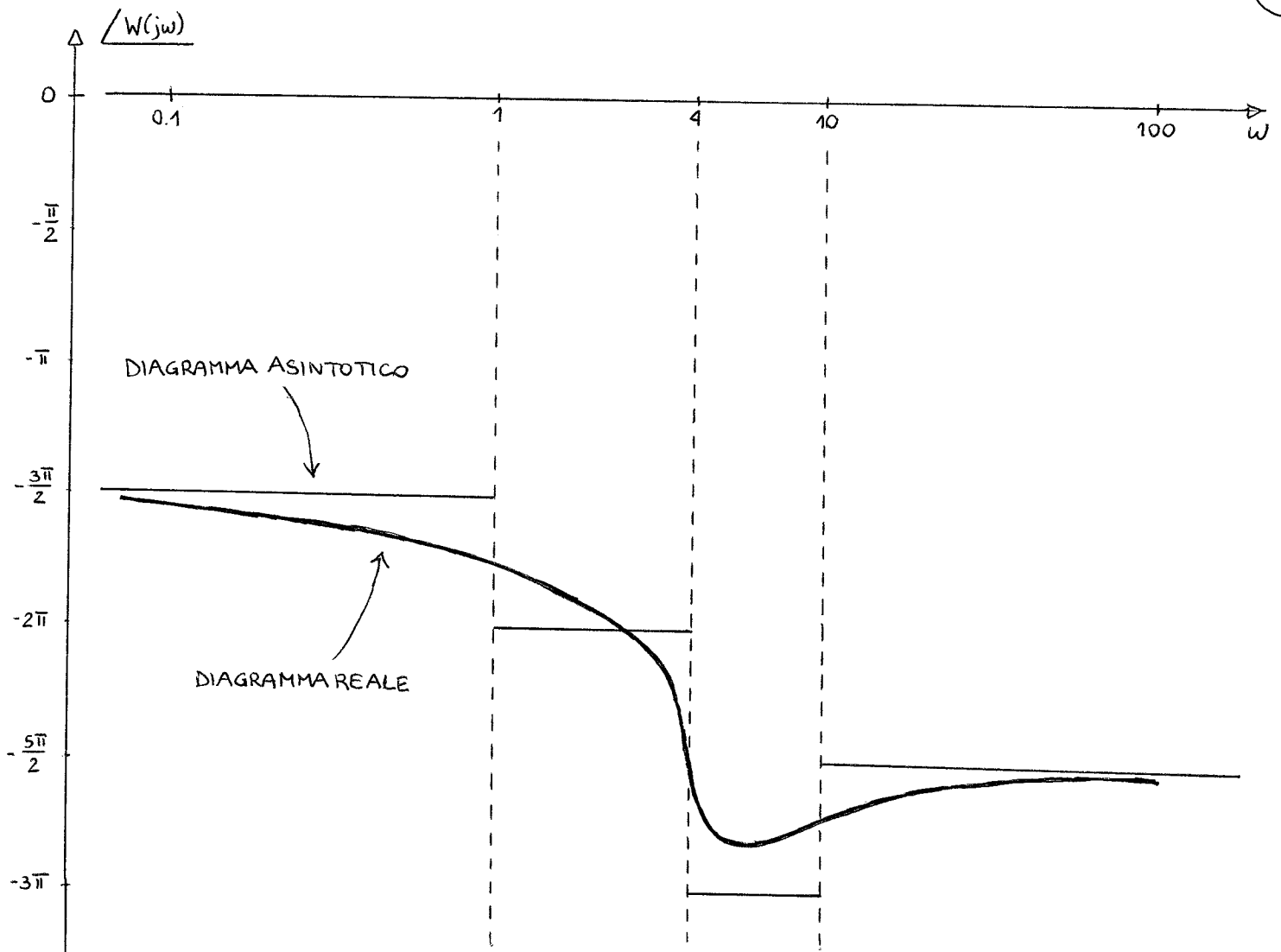
6. Correzione del diagramma

7

ATTENZIONE - In $\omega \approx \omega_n$ dobbiamo considerare la "gobbetta" dovuta al coefficiente di smorzamento ζ ...



~> TRACCIAMO ORA IL DIAGRAMMA DI BODE DELLA FASE,
UTILIZZANDO LO STESSO METODO...



- Se $w < \frac{1}{T_1} = 1$,

$$W_1(s) = \frac{k_b}{s}$$

$\nearrow k_b < 0 \Rightarrow \text{contributo } -\pi$
 $\searrow \text{contributo } -\frac{\pi}{2}$

Il contributo complessivo e^- : $-\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$

- Se $\frac{1}{T_1} \leq w < w_n$ ($1 \leq w < 4$),

$$W_2(s) = W_1(s) (1 - T_1 s)$$

$\nwarrow \text{contributo } -\frac{3\pi}{2}$ $\nearrow \text{zero instabile} \Rightarrow \text{contributo } -\frac{\pi}{2}$

Il contributo complessivo e^- : $-\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -2\pi$

- Se $\omega_n \leq \omega < \frac{1}{\tau_2}$ ($4 \leq \omega < 10$),

$$W_3(s) = W_2(s) \left(\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \right)$$

contributo -2π

coppia di poli complessi coniugati stabili $\Rightarrow$ contributo $-\pi$

Il contributo complessivo e^- : $-2\pi - \pi = -3\pi$.

- Se $\omega \geq \frac{1}{\tau_2} = 10$,

$$W(s) = W_3(s) (1 + \tau_2 s)$$

contributo -3π

zero stabile $\Rightarrow$ contributo $+\frac{\pi}{2}$

Il contributo complessivo e^- : $-3\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$.