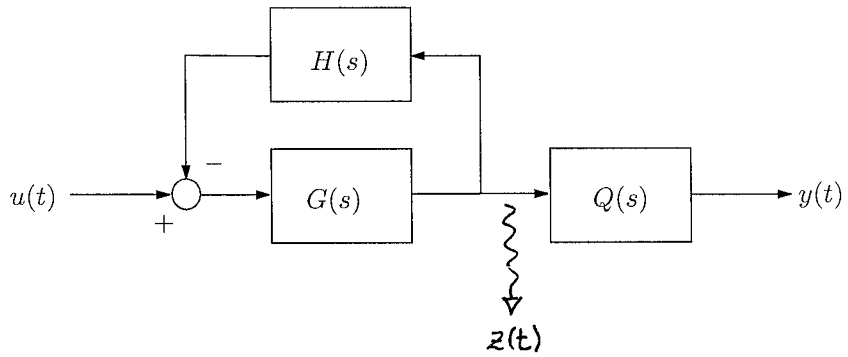
Esercizio

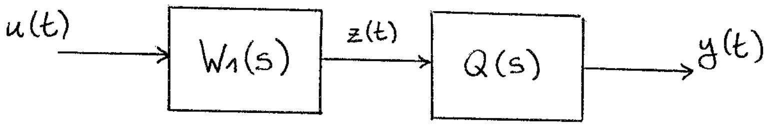
Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dal diagramma a blocchi in figura, dove $G(s) = \frac{1}{s}$, $H(s) = \frac{1}{s+10}$ e $Q(s) = \frac{s-1}{s+10}$. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema, e la risposta $y_p(t)$ a regime permanente corrispondente all'ingresso $u(t) = 3\sin(2t + \pi/8)$.



- Chiamiamo $z(t)$ il segnale in ingresso al blocco $Q(s)$. La funzione di trasferimento da $u(t)$ a $z(t)$ e':

$$W_1(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \qquad \text{- RETROAZIONE -}$$

ed il sistema puo' essere rappresentato nella forma:



A questo punto, la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$ e':

$$W(s) = W_1(s)\,Q(s) = \frac{G(s)Q(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{1}{s}\,\frac{s-1}{s+10}}{1 + \frac{1}{s}\,\frac{1}{s+10}} = \frac{s-1}{s(s+10)+1} = \frac{s-1}{s^2+10s+1}$$

- SERIE (O CASCATA) -

- La risposta a regime permanente corrispondente a un ingresso sinusoidale esiste se e solo se il sistema e' ILUL stabile.

I poli di $W(s)$ hanno parte reale negativa, e quindi il sistema che stiamo considerando e' ILUL stabile.

Possiamo dunque procedere al calcolo della risposta a regime permanente...

L'ingresso $u(t)$ è nella forma:

$$u(t) = A \sin(\omega t + \theta)$$

dove $A=3$, $\omega=2$ e $\theta = \frac{\pi}{8}$.

Applicando il TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA, la risposta a regime permanente risulta:

$$y_P(t) = A\,|W(j\omega)| \sin\left(\omega t + \theta + \angle W(j\omega)\right)$$

Calcoliamo $W(j\omega)$ in $\omega=2$:

$$W(j2) = \frac{j2-1}{(j2)^2 + 10\cdot j2 + 1} = \frac{-1+2j}{-4+20j+1} = \frac{-1+2j}{-3+20j} = \frac{1-2j}{3-20j}$$

Da cui:

$$|W(j2)| = \frac{|1-2j|}{|3-20j|} = \frac{\sqrt{1^2+(-2)^2}}{\sqrt{3^2+(-20)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{409}} = \sqrt{\frac{5}{409}} \simeq 0.11$$

$$\angle W(j2) = \angle 1-2j - \angle 3-20j = \operatorname{atan}\left(\frac{-2}{1}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{-20}{3}\right) =$$

$$= \operatorname{atan}(-2) - \operatorname{atan}\left(-\frac{20}{3}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{20}{3}\right) - \operatorname{atan}(2) \simeq 0.315 \text{ rad}$$

arcotangente

$\boxed{\text{NOTA: } \operatorname{atan}(-x) = -\operatorname{atan}(x)}$

Dunque:

$$y_P(t) = 3\sqrt{\frac{5}{409}} \sin(2t + \theta + \varphi)$$

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{20}{3}\right) - \operatorname{atan}(2)$$