

ESERCIZIO

1

Dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto descritto dalla funzione di trasferimento da $u(k)$ a $y(k)$:

$$W(z) = \frac{1 - \frac{5}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

- 1) scrivere l'equazione alle differenze che descrive il sistema
- 2) studiare la stabilità ILUL del sistema
- 3) calcolare la risposta forzata $y(k)$ corrispondente all'ingresso $u(k) = 1(k)$



gradino unitario

- 1) Essendo $Y(z) = W(z)U(z)$, abbiamo:

$$Y(z) = \frac{1 - \frac{5}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} U(z)$$

Da cui:

$$\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) Y(z) = \left(1 - \frac{5}{2} z^{-1}\right) U(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) = U(z) - \frac{5}{2} z^{-1} U(z)$$

Antitrasformando: (*)

$$y(k) - \frac{1}{2} y(k-1) = u(k) - \frac{5}{2} u(k-1) \Rightarrow \text{equazione alle differenze}$$

(*) Sfruttiamo la seguente proprietà delle trasformate $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z}[f(k-h)] = z^{-h} F(z)$$

- 2) La funzione di trasferimento $W(z)$ ha un unico polo $p_1 = \frac{1}{2}$

radice del denominatore

$$1 - \frac{1}{2} z^{-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2z} = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}$$

Dato che $|p_1| < 1$, il sistema è ILUL stabile.

3) Dalla tabella delle trasformate $\mathcal{Z}$ notevoli, osserviamo che

2

$$\mathcal{Z}[1(k)] = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\text{Dunque } U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}.$$

Ricaviamo $Y(z)$:

$$Y(z) = W(z)U(z) = \frac{1 - \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1 - \frac{5}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

Scomponiamo $Y(z)$ in fratti semplici:

$$Y(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}}$$

dove:

$$A = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} Y(z) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1 - 5}{1 - 2} = 4$$

$\searrow$ $\frac{1}{2}$ è la radice del binomio $1 - \frac{1}{2}z^{-1}$

$$B = \lim_{z \rightarrow 1} Y(z) (1 - z^{-1}) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1 - \frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = -3$$

$\searrow$ 1 è la radice del binomio $1 - z^{-1}$

Dunque:

$$Y(z) = 4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - 3 \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = 4 \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - 3 \cdot \frac{z}{z - 1}$$

Anti trasformando utilizzando la tabella delle trasformate $\mathcal{Z}$ notevoli:

$$y(k) = \left[4 \left(\frac{1}{2}\right)^k - 3 \right] 1(k).$$